I – التحويلات المثلثية – نسب مثلثية اعتيادية

بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

- $\cos(-x)=\cos x \quad ; \quad \sin(-x)=-\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$

نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة cos زوجية و أن الدالة sin فردية.

- $\tan(-x)=-\tan x$ لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة tan فردية.

- $\sin(\pi-x)=\sin x \quad ; \quad \cos(\pi-x)=-\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\sin(\pi+x)=-\sin x \quad ; \quad \cos(\pi+x)=-\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$

نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

II- تحويلات مثلثية أخرى

$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$$
$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$

$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$

b/ نتائج

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$
$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$
حيث $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

III - المعادلات المثلثية

ا – حلول المعادلة cosx=a

خلاصة * المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

* $\cos x = 1 \quad x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

* $\cos x = -1 \quad x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

* إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $]0;\pi[$ حيث $\cos\alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

ب- حلول المعادلة sinx=a

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$\sin x = 1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha = a$

حلول المعادلة $\sin x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مجموعة حلول المعادلة $S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

ج- حلول المعادلة tanx=a

$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$ حيث α حل للمعادلة $\tan x = a$ في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$