

## اتصال دالة عددية

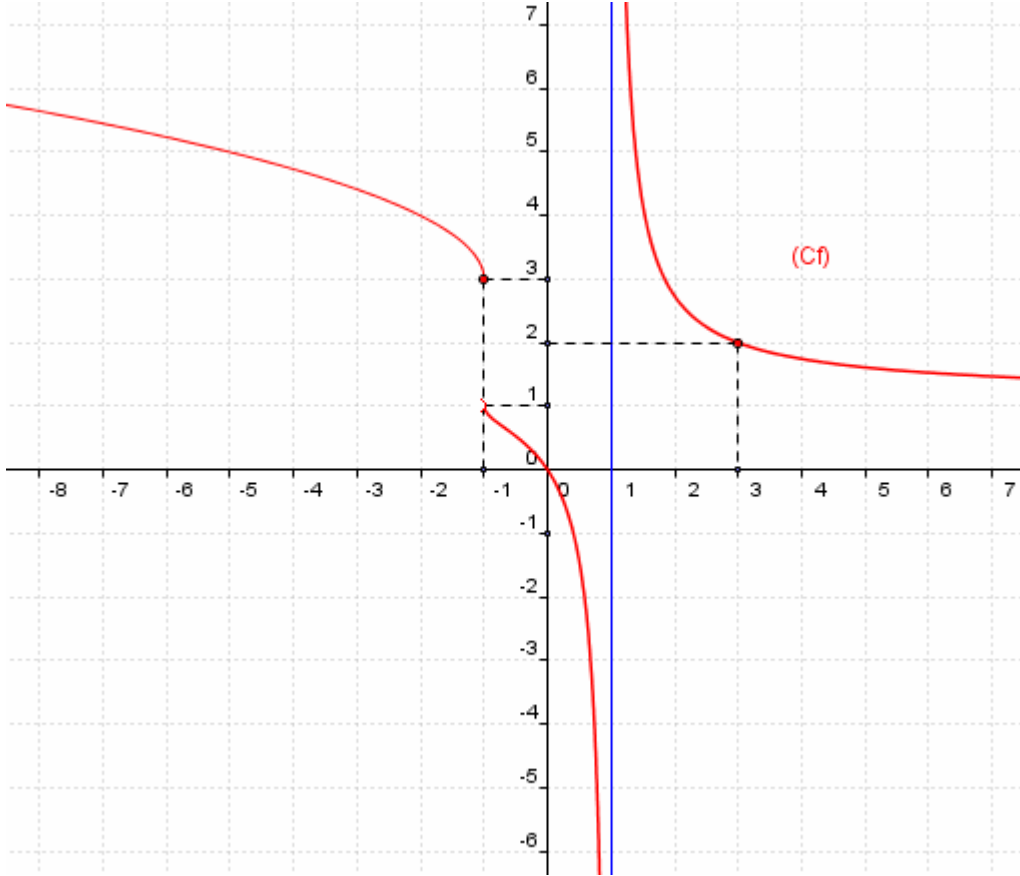
\* :  
\* :  
.....

$f(x) = \lambda$

$f(x) = \lambda$

### I- الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال 1- الاتصال في نقطة a / نشاط

ليكن  $(C_f)$  منحنى دالة عددية  $f$  كما في الشكل التالي:



- 1- من خلا الشكل كيف ترى المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الافصول -1 ثم عند النقطة ذات 3  
2- أ/ أحسب  $f(3)$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  ماذا تلاحظ  
ب/ أحسب  $f(-1)$  و أدرس نهاية  $f$  عند -1 ماذا تستنتج

الجواب:

1/ من خلال شكل المنحنى  $(C_f)$  يتضح ان المنحنى متقطع عند النقطة ذات الافصول -1  
و متصل عند النقطة ذات 3

2/ أ- من خلال شكل المنحنى  $(C_f)$  لدينا  $f(3) = 1.5$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

نلاحظ أن  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$  لذا نقول إن الدالة  $f$  متصلة عند النقطة 3

ب- من خلال شكل المنحنى  $(C_f)$  لدينا  $f(-1) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$

نلاحظ أن:  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  -\* نقول إن الدالة  $f$  غير متصلة عند -1

-\*  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$  نقول إن الدالة  $f$  متصلة على اليمين عند النقطة -1

-\*  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq f(-1)$  نقول إن الدالة  $f$  غير متصلة على اليسار عند النقطة -1

### b/ تعريف الاتصال

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال مفتوح  $I$  ، و  $x_0$  عنصرا من  $I$   
تكون  $f$  متصلة في النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

### تعريف الاتصال على اليمين على اليسار في نقطة

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال على مجال من نوع  $[x_0; x_0 + \alpha[$  حيث  $\alpha > 0$   
تكون  $f$  متصلة على اليمين في النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال على مجال من نوع  $]x_0 - \alpha; x_0]$  حيث  $\alpha > 0$   
تكون  $f$  متصلة على اليسار في النقطة  $x_0$  إذا وفقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

### خاصية

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال مفتوح  $I$  ، و  $x_0$  عنصرا من  $I$   
تكون  $f$  متصلة في النقطة  $x_0$  إذا وفقط  $f$  متصلة على اليمين و على اليسار في النقطة  $x_0$

### تمرين

1- أدرس اتصال  $f$  في  $x_0$  في الحالات التالية :

$$x_0 = 2 ; \begin{cases} f(x) = 2x + 1 & x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 & x \leq 2 \end{cases} /b \quad x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = \frac{\sin 3x}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases} /a$$

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ f(x) = x^2 - x & x \leq 0 \end{cases} /c$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax & x > -1 \\ f(x) = -x + 1 & x \leq -1 \end{cases} \quad \text{-2 حدد } a \text{ لكي تكون } f \text{ متصلة في } -1$$

### 2- الاتصال في مجال

#### تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على المجال مفتوح  $I$   
تكون  $f$  متصلة على  $I$  إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من  $I$

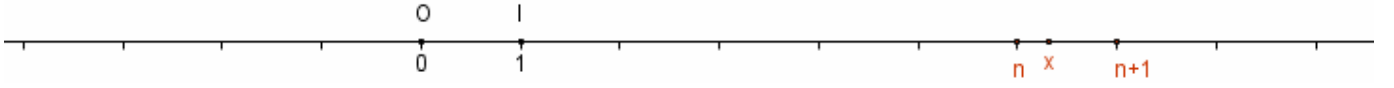
لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على المجال  $[a; b]$   
تكون  $f$  متصلة على  $[a; b]$  إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من  $]a; b[$  ومتصلة على اليمين  $a$   
و متصلة على اليسار  $b$

بالمثل نعرف الاتصال على  $]a; b[$  و على  $[a; b[$  و  $]a; +\infty[$  و  $]-\infty; a]$   
**ملاحظة** التمثيل المبياني لدالة متصلة على  $[a; b]$  هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين إحداثيتهما  $(a; f(a))$  و  $(b; f(b))$

### 3- اتصال دوال اعتيادية خاصية

الدوال الحدودية و الدوال الجدرية و الدوال  $x \mapsto \sqrt{x}$  و  $x \mapsto \cos x$  و  $x \mapsto \sin x$  و  $x \mapsto \tan x$  متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

### 4- دالة الجزء الصحيح



لكل عدد حقيقي  $x$  يوجد عدد صحيح نسبي وحيد  $n$  حيث  $n \leq x < n+1$   
العدد الصحيح النسبي  $n$  يسمى الجزء الصحيح للعدد  $x$

#### تعريف

دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{R}$  بجزئه الصحيح  
نرمز لصورة  $x$  بهذه الدالة بالرمز  $E(x)$  أو بالرمز  $[x]$

$$E(x) = n \Leftrightarrow \exists ! n \in \mathbb{Z} \quad n \leq x < n+1$$

#### أمثلة

$$-3 \leq -2,1 < -2 \quad \text{لأن} \quad E(-2,1) = -3$$

$$3 \leq 3,7 < 4 \quad \text{لأن} \quad E(3,7) = 3$$

$$-4 \leq -4 < -5 \quad \text{لأن} \quad E(-4) = -4$$

$$1 \leq \sqrt{2} < 2 \quad \text{لأن} \quad E(\sqrt{2}) = 1$$

#### التمثيل المبياني لدالة الجزء الصحيح

$$\forall x \in [n; n+1[ \quad E(x) = n$$

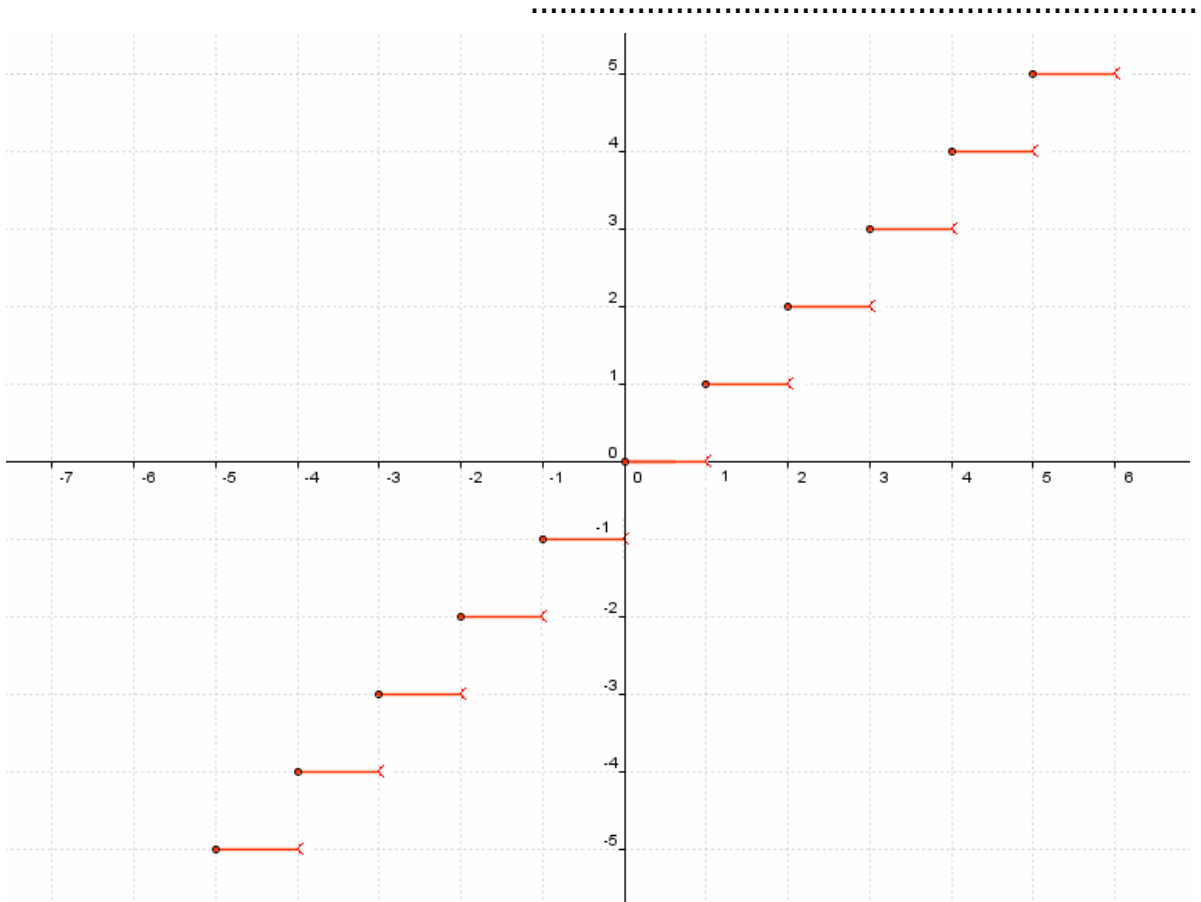
ليكن  $n \in \mathbb{Z}$

$$E(x) = -1 \quad \text{فان} \quad x \in [-1; 0[$$

$$E(x) = 0 \quad \text{فان} \quad x \in [0; 1[$$

$$E(x) = -2 \quad \text{فان} \quad x \in [-2; -1[$$

$$E(x) = 1 \quad \text{فان} \quad x \in [1; 2[$$



## نتائج

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad E(n) = n & \quad -* \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 & \quad -* \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad E(x+n) = E(x) + n & \quad -* \end{aligned}$$

ليكن  $n \in \mathbb{Z}$   
 -\* دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في  $n$  و غير متصل على اليسار في  $n$   
 -\* دالة الجزء الصحيح متصلة على  $[n; n+1[$   
 -\* دالة الجزء الصحيح غير متصلة في  $n$

## 5- قصور دالة

### تعريف

إذا كانت  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  و  $g$  دالة عددية معرفة على مجال  $J$  ضمن  $I$  بحيث  $\forall x \in J \quad g(x) = f(x)$  فاننا نقول ان الدالة  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $J$

### نتيجة

إذا كانت  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $J$  فان  $g$  متصلة على المجال  $J$

**تمرين** لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $[-1; +\infty[$  بما يلي :

$$\text{بين أن الدالة } f \text{ متصلة على المجال } [-1; +\infty[ \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x > 1 \\ f(x) = \frac{3x^2}{x+2} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

-\* الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  متصلة على حيز تعريفها  $[0; +\infty[$  و  $]1; +\infty[ \subset [0; +\infty[$  ومنه الدالة  $f$  متصلة على  $]1; +\infty[$

-\* الدالة  $x \mapsto \frac{3x^2}{x+2}$  متصلة على كل مجال ضمن  $\mathbb{R} - \{-2\}$  لأنها دالة حدودية و  $]1; +\infty[ \subset \mathbb{R} - \{-2\}$

ومنه الدالة  $f$  متصلة على  $[-1; 1[$

-\* لندرس اتصال  $f$  في 1

$$\text{لدينا } f(1) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{x+2} = 1$$

إذن  $f$  متصلة في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

إذن  $f$  متصلة على  $[-1; +\infty[$

## II- العمليات على الدوال المتصلة

### 1- خاصية (تقبل)

إذا كانتا  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على مجال  $I$  و  $\alpha$  عددا حقيقيا فان:

-\*  $f+g$  و  $\alpha f$  و  $f \times g$  متصلة على  $I$

-\* و إذا كانت  $g$  لا تنعدم على المجال  $I$  فان الدالتين  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلتان على مجال  $I$

### تمرين

حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$  و أدرس اتصالها على  $D_f$  في الحالات التالية

$$\begin{aligned} \text{أ- } f(x) &= x^2 + \sin(x) & \text{ب- } f(x) &= \sqrt{x} + \frac{x}{x+1} & \text{ج- } f(x) &= \frac{3x+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

## 2- اتصال مركب دالتين

### خاصية

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $g$  دالة معرفة على مجال  $J$  حيث  $f(I) \subset J$  إذا كانت  $f$  متصلة على  $I$  و  $g$  دالة متصلة على  $J$  فان  $g \circ f$  متصلة على  $I$ .

### تمرين :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$

(1) حدد  $D_f$ .

(2) اكتب  $f$  على شكل مركب دالتين. ثم أدرس اتصال الدالة  $f$  على  $D_f$ .

**نتيجة:**  $f$  موجبة ومتصلة على مجال  $I$

$f(I) \subset [0; +\infty[$  و  $x \mapsto \sqrt{x}$  متصلة على  $[0; +\infty[$

اذن  $\sqrt{f}$  متصلة على مجال  $I$  لان  $\sqrt{f} = \sqrt{\circ} f$

إذا كانت  $f$  موجبة ومتصلة على مجال  $I$  فان دالة  $\sqrt{f}$  متصلة على مجال  $I$

## III- صورة مجال بدالة متصلة

### 1- صورة قطعة - صورة مجال

**نشاط** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2$

و  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد و ممنظم  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1- انشئ  $(C_f)$ .

2- حدد مبيانيا صور كل من المجالات :  $[0; 2]$  ;  $[-1; 2]$  ;  $[-1; 2]$  ;  $[-1; 0]$  ;  $[0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

### خاصية

\* - صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

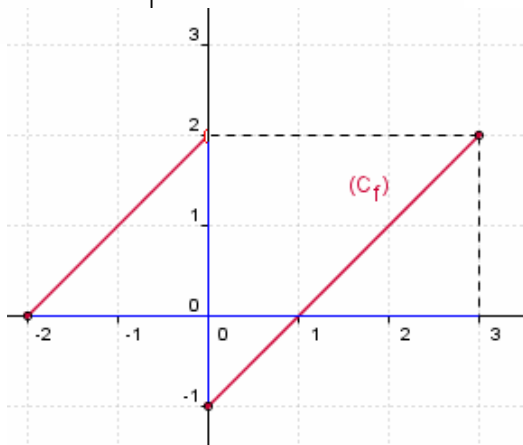
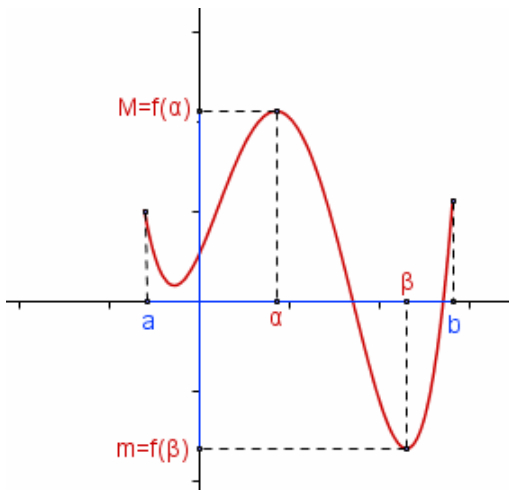
\* - صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

### ملاحظة

\* إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a; b]$  فانه يوجد  $\alpha$  و  $\beta$  من  $[a; b]$

حيث  $m = f(\beta) = \inf_{x \in [a; b]} (f(x))$  (القيمة الدنيا)

و  $M = f(\alpha) = \sup_{x \in [a; b]} (f(x))$  (القيمة القصوى)  $f([a; b]) = [m; M]$



\* إذا كان  $I$  مجالا من  $\mathbb{R}$  و  $f(I)$  ليس مجالا

من  $\mathbb{R}$  فان  $f$  غير متصلة على  $I$

\* في الخاصية الشرط  $f$  متصلة شرط كاف

و لكن غير لازما أي يمكن أن تكون صورة

مجال بدالة غير متصلة هي مجال

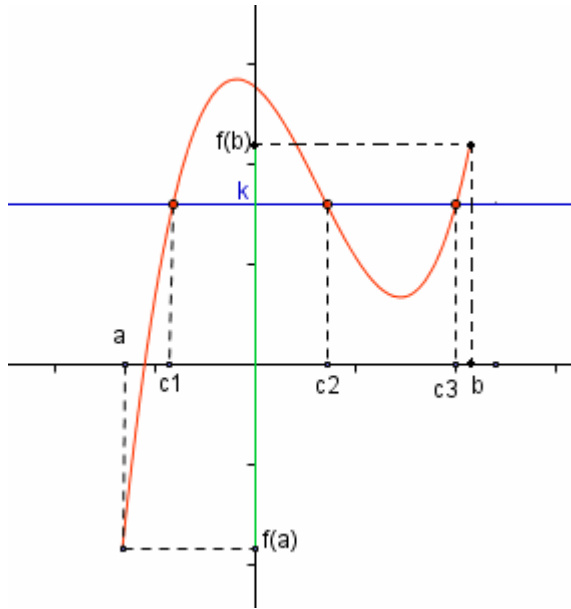
**مثال** نعتبر  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $[-2; 3]$

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 & x \in [-2; 0[ \\ f(x) = x - 1 & x \in [0; 3] \end{cases}$$

مع ذلك  $f([-2; 3]) = [-1; 2]$  غير متصلة على  $[-2; 3]$

لأنها غير متصلة في 0

## 2- مبرهنة القيم الوسيطة



$f$  متصلة على  $[a; b]$   
 $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$   
 ومنه  $k \in f([a; b])$   
 يوجد على الأقل عدد  $c$  محصور بين  $a$  و  $b$   
 حيث  $f(c) = k$ .

## مبرهنة القيم الوسيطة

إذا كانت  $f$  متصلة على  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$  فان لكل  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل عدد  $c$  محصور بين  $a$  و  $b$  حيث  $f(c) = k$ .

### نتيجة

إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a; b]$  وكان  $f(a) \cdot f(b) < 0$  فان المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا في  $]a; b[$ .

**تعرين** بين أن المعادلة  $2 \sin x = x$  تقبل حلا في  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

## 3- حالة دالة متصلة ورتبية قطعاً

الدالة $f$ متصلة و تناقصية قطعاً	
المجال $I$	المجال $f(I)$
$[a; b]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left[ f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty; a]$	$\left[ f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

الدالة $f$ متصلة و تزايدية قطعاً	
المجال $I$	المجال $f(I)$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$]a; b[$	$\left[ f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left[ f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$
$] -\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$

## تمرين

$f$  دالة عددية متصلة على  $]-\infty; 5]$  جدول تغيراتها كما يلي

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$5$
$f$	$-1$	$4$	$-5$	$3$

1/ حدد  $f([1;5])$  و  $f([0;5])$  و  $f([-2;1])$  و  $f(]-\infty;0])$

2/ حدد القيمة القصوى ثم القيمة الدنيا لدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 5]$  ثم استنتج  $f(]-\infty; 5])$

## تمرين

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}$

1/ حدد  $D_f$  2/ حدد صورة المجال  $]-\infty; \frac{1}{4}[$  بالدالة  $f$

## نتيجة

إذا كانت  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على  $[a;b]$  فإن لكل  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على عدد وحيد  $c$  محصور بين  $a$  و  $b$  حيث  $f(c) = k$ .

## نتيجة

إذا كانت  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على  $[a;b]$  وكان  $f(a) \cdot f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $]a;b[$ .

## تمرين

بين أن المعادلة  $x^3 + 1 = -x$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $]-1; -\frac{1}{2}[$

حدد تأطيراً للعدد  $\alpha$  سعته  $\frac{1}{8}$  (طريقة التفرع الثنائي)

## IV- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال خاصية 1-

إذا كانت دالة  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$  فإن لكل  $y$  من  $f(I)$  المعادلة  $f(x) = y$  تقبل حلاً وحيداً في  $I$  (نعبر عن هذا بقولنا  $f$  تقابل من  $I$  نحو المجال  $f(I)$ )

## تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$  و  $J$  مجال حيث  $f(I) = J$ . الدالة التي تربط كل عنصر  $y$  من  $J$  بالعنصر الوحيد  $x$  من  $I$  بحيث  $f(x) = y$  تسمى الدالة العكسية للدالة  $f$  نرمز لها بالرمز  $f^{-1}$

## نتائج

لتكن  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$  و  $f^{-1}$  دالتها العكسية

$$\forall x \in f(I) \quad \forall x \in I \quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\forall x \in f(I) \quad f \circ f^{-1}(x) = x \quad ; \quad \forall x \in I \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

## 2- خاصيات الدالة العكسية

### خاصية

إذا كانت دالة  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$  و  $f^{-1}$  دالتها العكسية فإن:

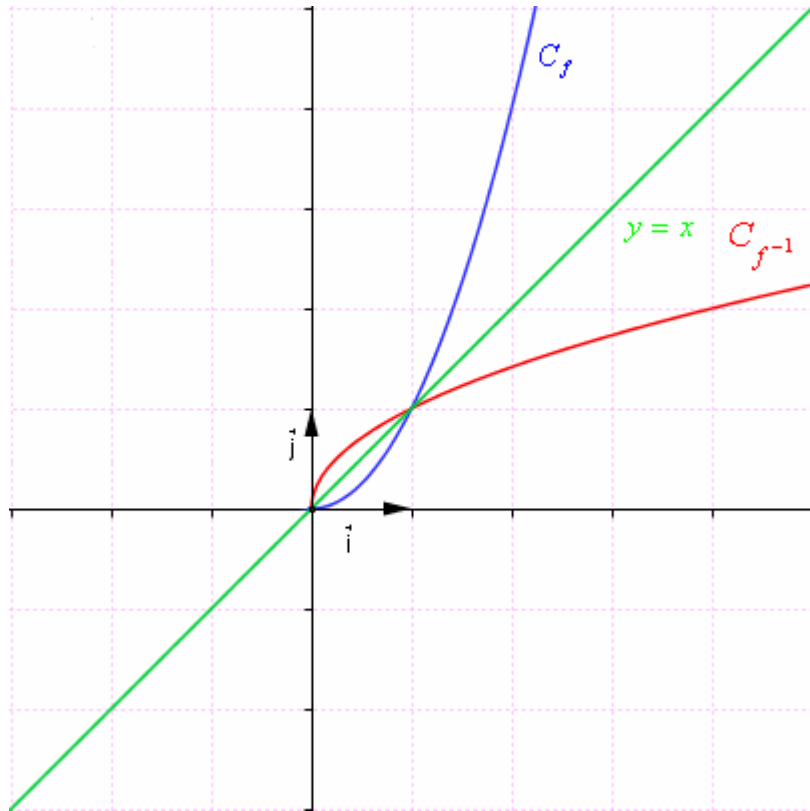
\*-  $f^{-1}$  متصلة على  $f(I)$

\*-  $f^{-1}$  رتبية قطعاً على  $f(I)$  و لها نفس رتبة  $f$  على مجال  $I$

\*-  $C_{f^{-1}}$  منحنى الدالة  $f^{-1}$  هو مماثل المنحنى  $C_f$  بالنسبة للمستقيم الذي معادلته  $y = x$  في

معلم متعامد و ممنظم.

المستقيم الذي معادلته  $y = x$  يسمى المنصف الاول للمعلم

**تمرين**

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ بـ}$$

بين أن القصور  $g$  للدالة  $f$  على  $[-1; 1]$  تقبل

دالة عكسية  $g^{-1}$  على مجال  $J$  يجب تحديده  
ثم حدد  $g^{-1}$

**تمرين:**

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; \frac{1}{2}]$

$$f(x) = \sqrt{1-2x} \text{ بـ}$$

1/ بين أن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  على

مجال  $J$  يجب تحديده

2/ حدد  $f^{-1}$

3/ في معلم متعامد ممنظم أنشئ  $C_{f^{-1}}$  ثم

انشئ  $C_f$  في نفس المعلم

**3- دالة الجذر من الرتبة n**

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

بين أن الدالة  $x \rightarrow x^n$  تقبل دالة عكسية من  $\mathbb{R}^+$  إلى  $\mathbb{R}^+$

**أ- تعريف**

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

الدالة العكسية للدالة المعرفة على  $[0; +\infty[$  بما يلي  $x \rightarrow x^n$  تسمى دالة الجذر من الرتبة  $n$

يرمز له بـ  $\sqrt[n]{x}$  . نرسم

نرمز لصورة العدد  $x$  بالرمز  $\sqrt[n]{x}$  و يقرأ الجذر من الرتبة  $n$  للعدد  $x$ .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

**ملاحظة و اصطلاح**

ليكن  $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt[3]{x} \text{ يسمى الجذر المكعب للعدد } x \quad - \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} \quad ; \quad \sqrt[1]{x} = x \quad -$$

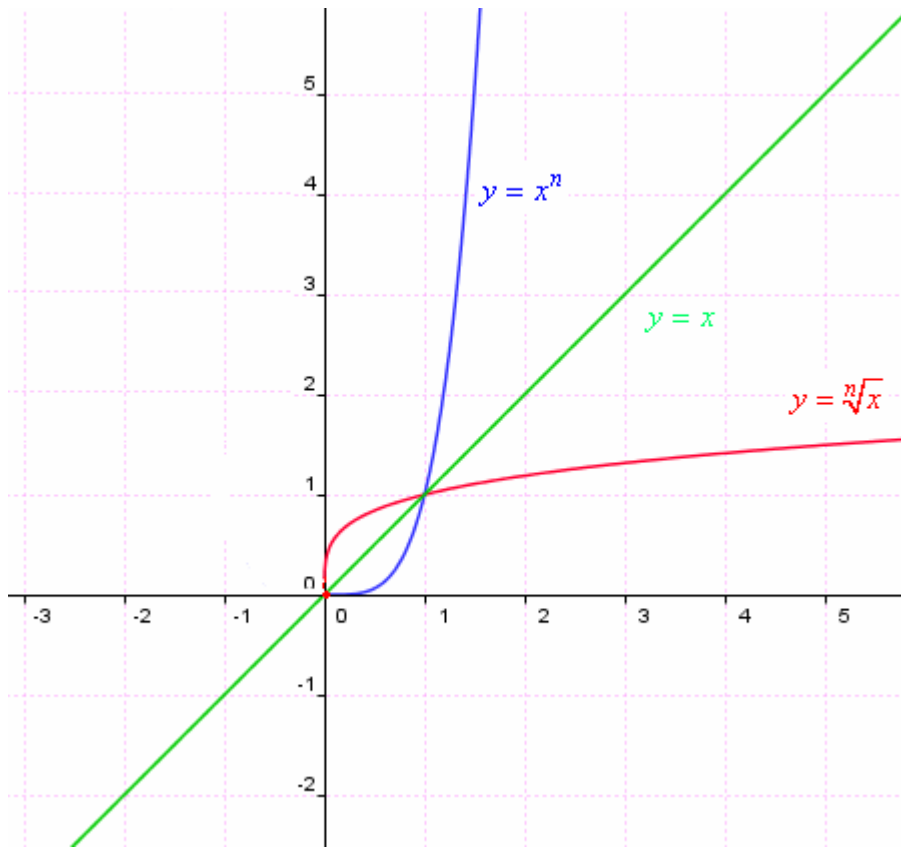


## خاصية

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$$-* \text{ الدالة } x \rightarrow \sqrt[n]{x} \text{ متصلة على } [0; +\infty[ \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

\*- في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  مماثل لمنحنى الدالة  $x \rightarrow x^n$  بالنسبة للمنصف الأول للمعلم



حالة:  $n = 4$

## نتائج

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

**ب- حل المعادلة  $x^n = a$   $x \in \mathbb{R}$**

**تمرين** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات  $x^4 = 5$  ;  $x^7 = -8$  ;  $x^5 = 243$

**تمرين** ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $a \in \mathbb{R}$  حل وناقش في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $x^n = a$

## ج- العمليات على الجذور

ليكن  $(n; p) \in \mathbb{N}^{*2}$  ;  $(a; b) \in \mathbb{R}^{+2}$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^{pn} = (\sqrt[np]{a^p})^{pn} \Leftrightarrow \left( (\sqrt[n]{a})^n \right)^p = a^p \Leftrightarrow a^p = a^p \quad \text{البرهان}$$

$$-1 \text{ برهن أن } \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (n; m) \in \mathbb{N}^{*2}$$

**تمرين**

3- قارن  $\sqrt[3]{2}$  ;  $\sqrt[3]{3}$  -2 بسط  $\frac{\sqrt[3]{1024}\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{64}\sqrt[3]{\sqrt{256}}\sqrt{18}}$

**د- اتصال ونهاية مركبة دالة و دالة الجذر النوني**  
**خاصيات**

لتكن  $f$  دالة موجبة على مجال  $I$  و  $x_0$  عنصرا من  $I$

❖ إذا كانت  $f$  متصلة على  $I$  فان  $\sqrt[n]{f}$  متصلة على  $I$

❖ إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

❖ إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

**ملاحظة**

الخاصيات تظان صالحتين عندما يؤول  $x$  الى  $x_0$  على اليمين أو الى  $x_0$  على اليسار أو الى  $+\infty$  أو الى  $-\infty$

**تمرين**

1- لتكن  $(E)$  المعادلة  $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x}$   $x \in \mathbb{R}$

أ/ تأكد أن 1 حل للمعادلة  $(E)$  ب/ حل المعادلة  $(E)$

2- بين أن الدالة  $x \rightarrow \sqrt[5]{x^2 - 2x - 3}$  متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .

3- حدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[8]{x^3 - x + 3}$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 8}$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x^3 + x + 1}}{\sqrt{x+1}}$

**4- القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب** (امتداد للقوة الصحيحة النسبية)

**تعريف**

ليكن  $r \in \mathbb{Q}^*$  ;  $a \in \mathbb{R}^+$

العدد  $a^r$  هو العدد  $\sqrt[q]{a^p}$  حيث  $r = \frac{p}{q}$  ;  $(p; q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$  و يسمى القوة الجذرية للعدد  $a$  ذات

الأس  $r$  .  $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

**ملاحظة**  $a \in \mathbb{R}^{+*}$   $a^0 = 1$

**حالة خاصة**  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  لكل  $x$  من  $[0; +\infty[$

**خاصيات**

ليكن  $(a; b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$  ;  $(r; r') \in \mathbb{Q}^2$

$a^r a^{r'} = a^{r+r'}$  ;  $a^r b^r = (ab)^r$  ;  $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$  ;  $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$  ;  $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

البرهان نضع  $r = \frac{p}{q}$  ;  $r' = \frac{n}{m}$  ومنه  $a^r a^{r'} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[qm]{a^{pm} a^{nq}} = \sqrt[qm]{a^{pm+nq}} = a^{\frac{pm+nq}{qm}} = a^{r+r'}$

**تمرين**

احسب :  $A = \frac{2^{\frac{5}{3}} 3^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}}\right)^3}{\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[5]{3^{-3}}\right)^4}$

## طريقة التفرع النهائي DICHOTOMIE

### نتيجة لمبرهنة القيم الوسيطة

إذا كانت  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على  $[a; b]$  وكان  $f(a) \cdot f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $]a; b[$ .

تحديد تأطيراً للعدد  $\alpha$  سعته  $l$

