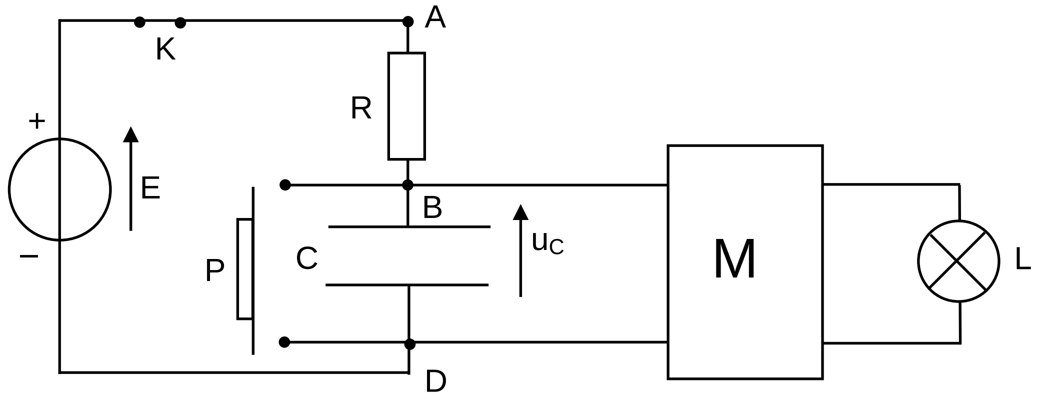
Polynésie Juin 2005
EXERCICE I: PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D'UNE MINUTERIE (7,5 points)

L'objet de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée t_0 réglable.

Le montage du circuit électrique est constitué :

- d'un générateur idéal de tension, de force électromotrice E = 30 V.
- d'un interrupteur K.
- d'un conducteur ohmique de résistance R.
- d'un condensateur de capacité C.
- d'un bouton poussoir P qui joue le rôle d'un interrupteur: il est fermé seulement quand on appuie dessus.
- **d'un composant électronique M qui permet l'allumage de la lampe L tant que la tension aux bornes du condensateur est inférieure à une tension limite, caractéristique du composant, notée** U_ℓ (dans tout l'exercice on fixera U_ℓ à une valeur constante égale à 20 V).

Le composant électronique M possède une alimentation électrique propre (non représentée sur le schéma) qui lui fournit l'énergie nécessaire à l'allumage de la lampe.
De ce fait, on admettra que le composant électronique M ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC, **c'est-à-dire que la tension aux bornes du condensateur est identique que M soit présent ou non dans le circuit.**



I - Étude du circuit RC

A l'instant initial (t = 0 s), le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, le bouton poussoir P est relâché (voir schéma ci-dessus).

1. On souhaite visualiser les variations de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps à l'aide d'un oscilloscope à mémoire.
   Indiquer les branchements à réaliser (voie 1 et masse) sur le schéma **du document 1 de l'annexe 1 à rendre avec la copie.**

2. Montrer que l'équation différentielle donnant les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps est de la forme :

$$u_c(t) + RC\frac{du_c(t)}{dt} = E$$

3. a) En vérifiant que la fonction du temps $u_c(t) = A\ (1 - e^{-t/\tau})$ est solution de l'équation différentielle précédente montrer que $A = E$ et que $\tau = RC$.

   b) Quelle est la valeur de u_C en régime permanent ?

   c) Quel est le nom donné à la constante τ ?
   A l'aide d'une analyse dimensionnelle, donner l'unité de la constante τ.

4. La représentation graphique de la fonction $u_C(t)$ est donnée dans le **document 2 de l'annexe 1, à rendre avec la copie.**
   Faire apparaître sur ce graphe sans aucune justification :

   - la tension E,
   - la constante τ ,
   - les régimes permanent et transitoire.

5. Calculer la valeur de la constante τ pour $R = 100\ k\Omega$ et $C = 200\ \mu F$.

6. a) Donner l'expression littérale de la date t_0 à laquelle la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur limite U_ℓ en fonction de U_ℓ , E et τ. (t_0 est la durée d'allumage de la lampe).

   b) Calculer la valeur de t_0 et vérifier la validité du résultat à l'aide du graphe $u_C(t)$ fourni dans le **document 2 de l'annexe 1 à rendre avec la copie**.

   c) On a fixé U_ℓ à 20 V pour obtenir une durée d'allumage t_0 voisine de τ. Pour quelle raison choisir t_0 très supérieur à τ, n'aurait pas été judicieux pour un tel montage ?

7. Quel(s) paramètre(s) du montage peut-on modifier sans changer le générateur afin d'augmenter la durée d'allumage de la lampe ?
   En fixant $C = 200\ \mu F$ quelle valeur doit-on donner à la résistance R pour obtenir une constante de temps d'une minute ?

8. On appuie sur le bouton poussoir. Que vaut la tension aux bornes du condensateur ?
   La comparer à U_ℓ . Que se passe-t-il pour la lampe dans les cas suivants :

   a) la lampe est déjà allumée ?

   b) la lampe est éteinte ?

II - Méthode d'Euler

On se propose maintenant de résoudre numériquement l'équation différentielle établie à la question I-2, R et C conservant les valeurs $R = 100\ k\Omega$ et $C = 200\ \mu F$.

1. A partir de cette équation différentielle, donner la relation entre la dérivée $\left(\frac{du_c(t)}{dt}\right)$ et la tension $u_C(t)$.

La méthode d'Euler permet de calculer successivement les valeurs de $u_C(t)$ et de $\left(\frac{du_c(t)}{dt}\right)$ à un intervalle de temps régulier Δt appelé le pas.

En prenant un pas suffisamment petit on peut écrire la relation :

$$u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \left(\frac{du_c(t)}{dt}\right). \Delta t$$

Pour cette étude, on prend un pas égal à: $\Delta t = 2$ s.

2. En utilisant l'expression littérale ci-dessus, compléter dans le tableau donné en annexe **(document 3, annexe 1)** les colonnes correspondant aux dates t = 2 s et t = 4 s.

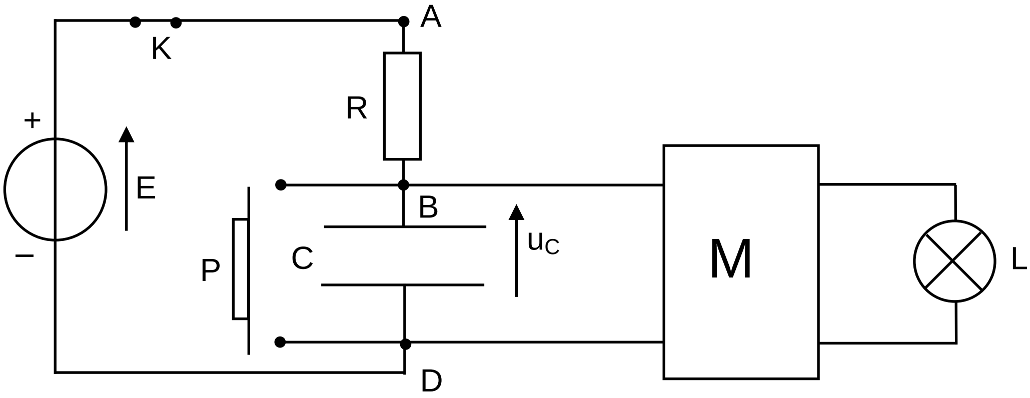
3. **Le document 4 de l'annexe 2** représente un agrandissement de la courbe $u_C(t)$ du document 2. Tracer sur ce document **à rendre avec la copie**, la partie du graphe $u_C(t)$ correspondant à ce tableau. Que constatez-vous ?

4. On peut améliorer la précision de la méthode d'Euler en modifiant la valeur du pas Δt.
Quelle modification pourrait-on apporter à la valeur du pas Δt ?
Quel serait l'inconvénient de cette modification ?

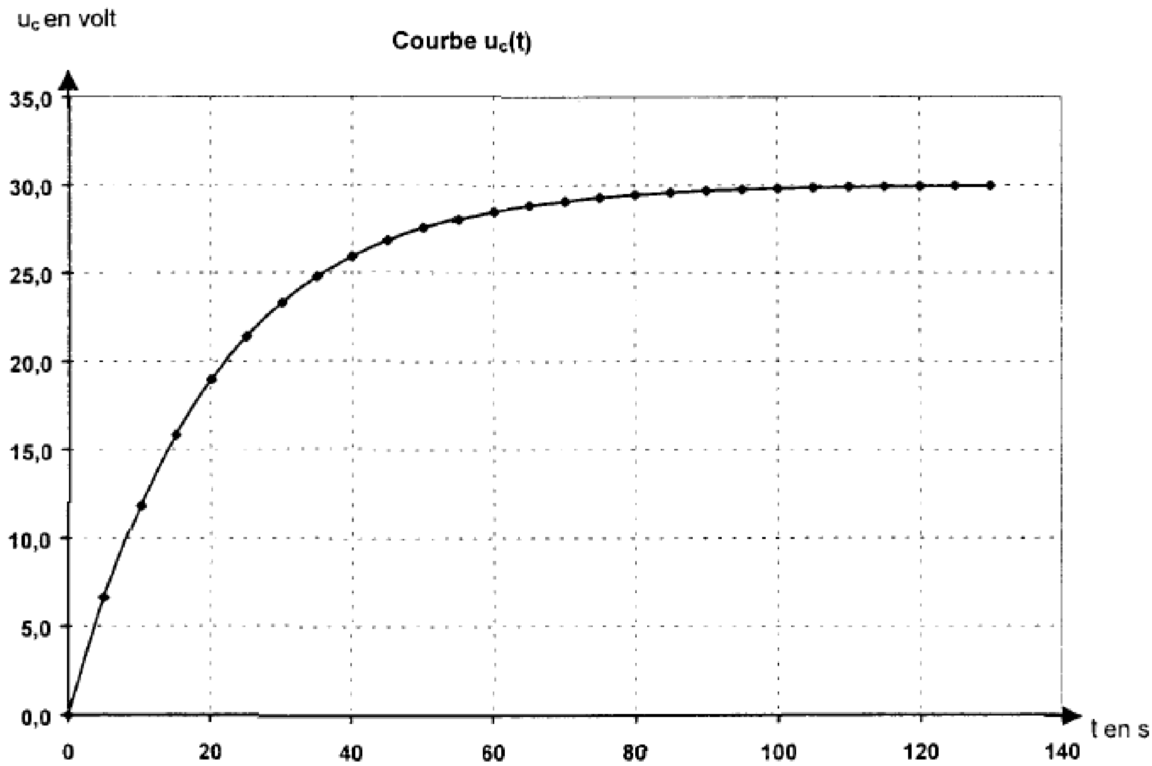
ANNEXE 1 : A RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE I

Document 1



Document 2



Document 3

t (s)	0	2	4	6	8	10	12	…	20
u_C (t)	0			8,14	10,3	12,3	14,1	…	19,6
$\left(\frac{du_C(t)}{dt}\right)$	1,50			1,09	0,99	0,89	0,80	…	0,52

ANNEXE 2 : A RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE I : Document 4