09/2006 Antilles Exercice n°2 (5 points) DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

Correction http://labolycee.org ©

1. ÉTABLISSEMENT DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE LORS DE LA DECHARGE

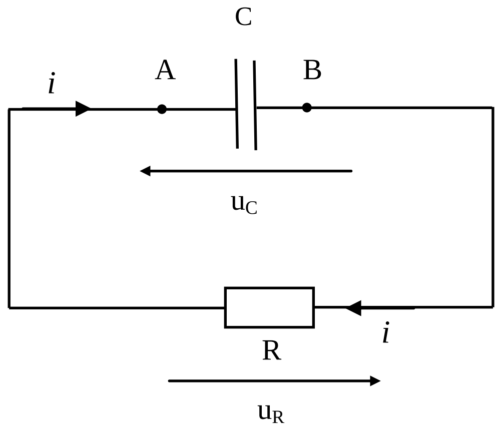
1.1. ***(0,125)*** D'après la loi d'additivité des tensions : $\mathbf{u_C + u_R = 0}$.

1.2. ***(0,25)*** $\mathbf{q_A = C.u_C}$

1.3. ***(0,25)*** L'intensité a été comptée positivement au cours de la charge du condensateur, lors de la décharge le courant change de sens, alors **i est négative**.

$i = \dfrac{dq_A}{dt}$

remarque : $dq_A = q_A(t+dt) - q_A(t) < 0$ car la charge portée par l'armature A diminue lors de la décharge. On retrouve bien $i < 0$.



En utilisant le 1.2., il vient $i = \dfrac{dC.u_C}{dt}$.

C étant constante on a $\boxed{i = C.\dfrac{du_C}{dt}}$

1.4. D'après 1.1. $u_C + u_R = 0$

d'après la loi d'Ohm $u_R = R.i$

$u_C + R.i = 0$

d'après 1.3. $u_C + R.C\dfrac{du_C}{dt} = 0$

$$\frac{1}{RC}.u_C + \frac{du_C}{dt} = 0 \qquad \textit{\textbf{(0,25)}}$$

Cette équation différentielle est bien de la forme $\alpha\, u_C + \dfrac{du_C}{dt} = 0$ avec $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ ***(0,125)***

2. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

2.1. ***(0,75)*** $u_C = Ae^{-\beta t}$ et $\dfrac{1}{RC}.u_C + \dfrac{du_C}{dt} = 0$

Exprimons tout d'abord $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{dA.e^{-\beta.t}}{dt} = A\,\dfrac{de^{-\beta.t}}{dt} = -A.\beta.e^{-\beta.t}$

Remplaçons l'expression obtenue dans l'équation différentielle

$\dfrac{1}{RC}.A.e^{-\beta t} - A.\beta.e^{-\beta.t} = 0$

$A.e^{-\beta t}\left(\dfrac{1}{RC} - \beta\right) = 0$

Cette égalité est vérifiée quel que soit t,

si A = 0 mais l'énoncé précise que A est une constante > 0 donc impossible

ou si $\dfrac{1}{RC} - \beta = 0$ soit si $\beta = \dfrac{1}{RC}$.

2.2. ***(0,25)*** à la date t = 0, on a $u_C(0) = U_0 = 10$ V

$u_C(0) = A.e^{-\beta\times 0} = A$

donc $\mathbf{A = U_0}$

A = 10 V.

2.3. ***(0,25)*** Lors de la décharge du condensateur, la tension u_C à ses bornes décroît. La courbe 1 convient.
On peut aussi ajouter que seule la courbe 1 est en accord avec $u_C(0) = U_0 = 10$ V.

2.4. ***(0,125)*** $\tau = R.C$

2.5. ***(0,325)*** $\boldsymbol{\tau = R.C}$

$[\tau] = [R].[C]$

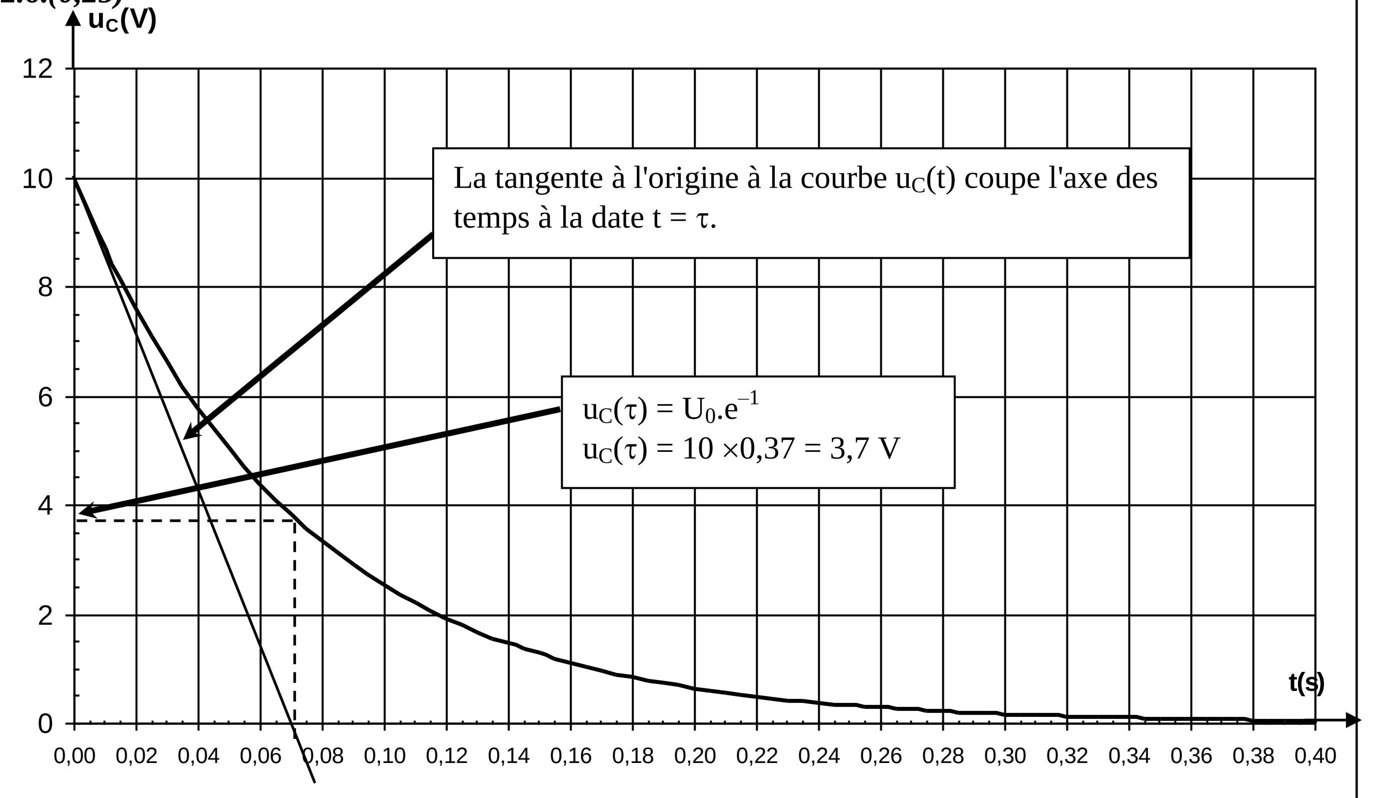
D'après la loi d'Ohm $u_R = R.i$, donc $R = \dfrac{u_R}{i}$ soit $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$

D'après le 1.3. $i = C.\dfrac{du_C}{dt}$, donc $C = i.\dfrac{dt}{du_C}$ soit $[C] = [I].\dfrac{[T]}{[U]}$

$[\tau] = \dfrac{[U]}{[I]}.[I].\dfrac{[T]}{[U]}$

$\boldsymbol{[\tau] = [T]}$ **τ est homogène à un temps.**

2.6.*(0,25)*



Les deux méthodes conduisent à $\boldsymbol{\tau = 0,07}$ **s**.

2.7. ***(0,25)*** $\tau = R.C$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

$C = \dfrac{0,07}{33} = 2\times10^{-3}$ F = **2 mF**

3. INTENSITÉ DU COURANT

3.1. ***(0,25)*** On a établi précédemment dans le 1.3. i = $C.\frac{du_C}{dt}$

et dans le 2.1. et 2.2 $u_C = Ae^{-\beta t}$ avec A = U_0 et $\beta = \frac{1}{RC}$ soit $u_C = U_0 e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$

donc $\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R.C} e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$

finalement $i = -\frac{U_0}{R} e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$

3.2. ***(0,25)*** $i(0) = I_0 = -\frac{U_0}{R}$

$i(0) = -\frac{10}{33} =$ **– 0,30 A**

3.3. ***(0,25)*** Seule la **courbe 3** est en accord avec $I_0 < 0$.

3.4. ***(0,125)*** à la date t = 0,50 s

$i = -\frac{U_0}{R} e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$

$i(0{,}50) = -\frac{10}{33} \times e^{-\left(\frac{0{,}50}{0{,}07}\right)} = -2\times 10^{-4}$ A = **– 0,2 mA**

3.5. ***(0,125)*** $u_C = U_0 e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$

$u_C(0{,}50) = 10 \times e^{-\left(\frac{0{,}50}{0{,}07}\right)} = 8\times 10^{-3}$ V = **8 mV**

3.6. La durée écoulée est supérieure à cinq fois la valeur de la constante de temps τ, on trouve une valeur de u_C très proche de zéro. On peut considérer que **le condensateur est déchargé**.

4. ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS LE CONDENSATEUR

4.1. ***(0,25)*** $E = \frac{1}{2}.C.u_C^2$

$q_A = C.u_C$ soit $u_C = \frac{q_A}{C}$

$E = \frac{1}{2}.C.\left(\frac{q_A}{C}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{q_A^2}{C}$

4.2. ***(0,25)*** L'énergie emmagasinée à la date t = 0 s dans le condensateur C a pour expression : $E = \frac{1}{2}.C.U_0^2$

Pour le condensateur C ' (avec C ' > C), on a $E' = \frac{1}{2}.C'.U_0^2$.

U_0 étant constante, alors **E' > E**.