

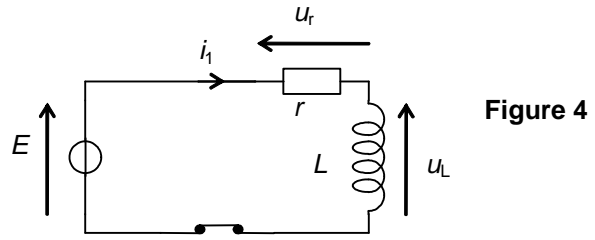
1. Étude du circuit primaire sans condensateur.**1.1. Rupteur fermé**

1.1.1. (0,25) Loi d'additivité des tensions:

$$E = u_r + u_L$$

$$(0,25) \text{ Loi d'Ohm: } E = r \cdot i_1 + L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

(0,25) En divisant par L il vient $\frac{di_1}{dt} + \frac{r}{L} i_1 = \frac{E}{L}$



1.1.2. (0,25) En régime permanent, l'intensité i_1 est constante donc $\frac{di_1}{dt} = 0$

alors $E = r \cdot i_1$ en notant i_1 l'intensité du courant dans le circuit primaire en régime permanent

1.1.3. (0,25) On a $i_1 = \frac{E}{r}$

$$i_1 = \frac{12}{6,0} = 2,0 \text{ A.}$$

1.1.4. (0,25) En régime permanent, $\frac{di_1}{dt} = 0$, donc la tension $u_2 = \alpha \cdot \frac{di_1}{dt}$ aux bornes de la bougie est nulle. Il ne peut y avoir d'étincelle aux bornes de la bougie.

1.2. Rupteur ouvert

1.2.1. (0,25) La bobine s'oppose transitoirement à la rupture du courant dans le circuit, d'où l'apparition de l'étincelle aux bornes du rupteur.

1.2.2. (0,25) On donne l'expression temporelle de l'intensité $i_1(t)$ pour $t \geq 0$:

$$i_1(t) = \frac{E}{R+r} + \left(i_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R+r}$$

Figure 5

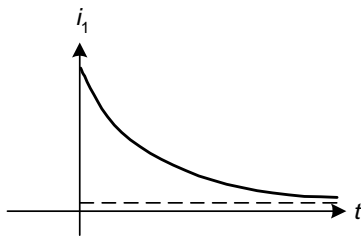
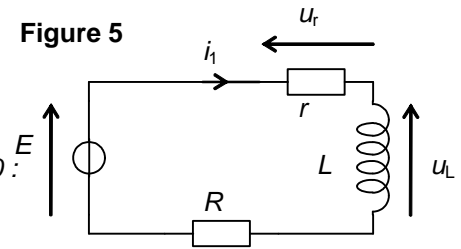


Figure 6.a

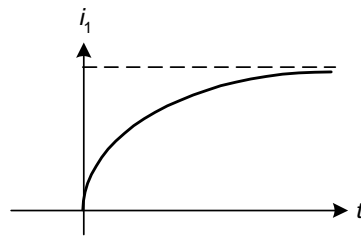


Figure 6.b

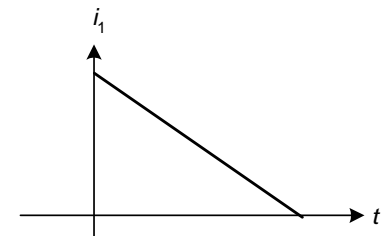


Figure 6.c

- $i_1(0) = \frac{E}{R+r} + \left(i_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{E}{R+r} + \left(i_1 - \frac{E}{R+r} \right) = i_1 \neq 0$

Donc la figure 6.b. ne convient pas car elle montre que $i_1(0) = 0$.

- $\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R+r} + \left(i_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-\frac{\infty}{\tau}} = \frac{E}{R+r}$ avec R très élevée donc i_1 tend vers une valeur faible.

La figure 6.a. convient.

- L'expression donnée pour $i_1(t)$ montre qu'il s'agit d'une fonction exponentielle. Or, sur la figure 6.c, le graphe $i_1(t)$ est une droite ne passant pas par l'origine caractéristique d'une fonction affine de la forme $i_1(t) = a \cdot t + b$ qui n'est pas une fonction exponentielle.

La seule courbe compatible avec l'expression $i_1(t)$ est donc celle de la **figure 6.a**: il s'agit d'une fonction exponentielle décroissante au cours du temps.

1.2.3. (0,25) $u_2 = \alpha \frac{di_1}{dt}$ avec α constante positive indépendante du temps avec $i_1(t) = \frac{E}{R+r} + \left(I_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$

donc $u_2 = -\frac{\alpha}{\tau} \cdot \left(I_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$

Pour $t = 0$, $u_2(0) = -\frac{\alpha}{\tau} \cdot \left(I_1 - \frac{E}{R+r} \right)$ et pour $t = \tau$, $u_2(\tau) = -\frac{\alpha}{\tau} \cdot \left(I_1 - \frac{E}{R+r} \right) e^{-1}$.

On constate que $u_2(\tau) = u_2(0) \cdot e^{-1}$.

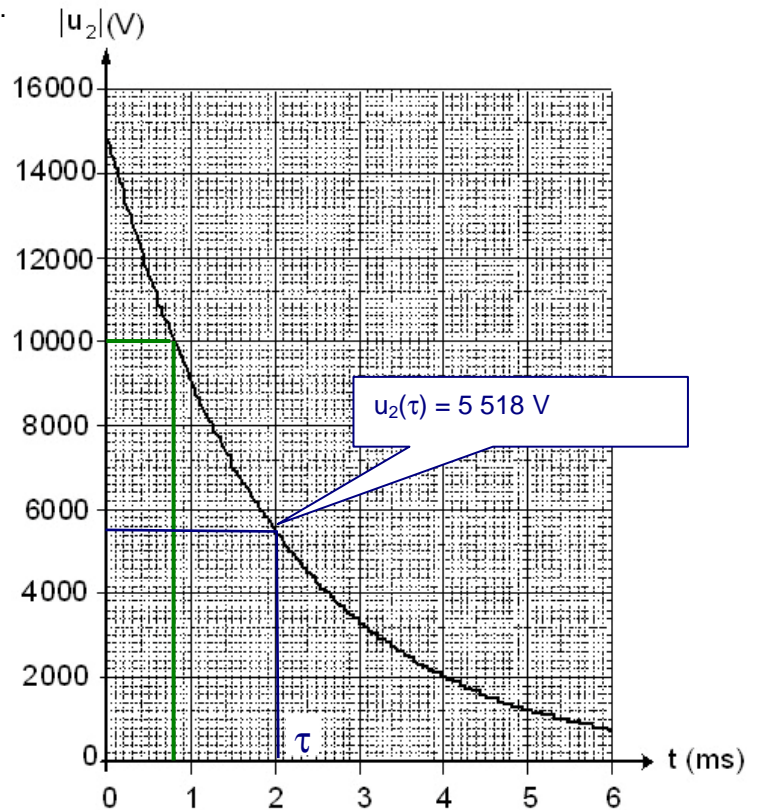
Graphiquement on lit $u_2(0) = 15\,000\text{ V}$, donc $u_2(\tau) = 15\,000 \times e^{-1} = 5518\text{ V}$.

On détermine l'abscisse τ du point d'ordonnée 5518 V.

On trouve $\tau = 2,0\text{ ms}$.

1.2.4. (0,25) L'étincille aux bornes de la bougie apparaît lorsque $|u_2| > 10\,000\text{ V}$.

Donc, graphiquement, il n'y a plus d'étincille lorsque $t > 0,8\text{ ms}$. (droite verticale en vert).



2. Étude du circuit primaire avec condensateur et rupteur ouvert.

2.1.1. (0,25) Expression littérale de l'intensité: $i_1 = \frac{dq(t)}{dt}$ avec $q(t) = Q_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma} t\right) + C.E$

$$i_1 = -\frac{2\pi}{\gamma} \cdot Q_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\gamma} t\right)$$

2.1.2. (0,25) Expression littérale de $\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cdot Q_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma} t\right)$

2.1.3. (0,25) On a $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cdot Q_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma} t\right) + \frac{Q_0}{LC} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma} t\right) + \frac{CE}{LC} = \frac{E}{L}$$

$$\Leftrightarrow Q_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma} t\right) \cdot \left(-\frac{4\pi^2}{\gamma^2} + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

(0,25) \Leftrightarrow Cette égalité est valable pour tout t si $\left(-\frac{4\pi^2}{\gamma^2} + \frac{1}{LC}\right) = 0$

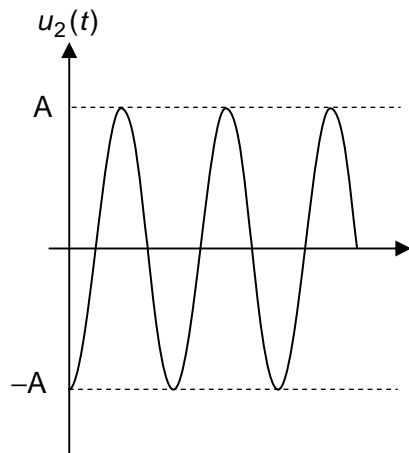
(0,25) $\Leftrightarrow \gamma^2 = 4\pi^2 \cdot LC$ Finalement $\boxed{\gamma = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$.

2.1.4. (0,25) Le terme γ représente la **période propre** T_0 des oscillations électriques dans le circuit LC.

2.1.5. (0,25) On a $u_2(t) = \alpha \cdot \frac{di_1}{dt} = \alpha \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\alpha \cdot \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 \cdot Q_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right) = -\alpha \cdot \frac{Q_0}{LC} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$

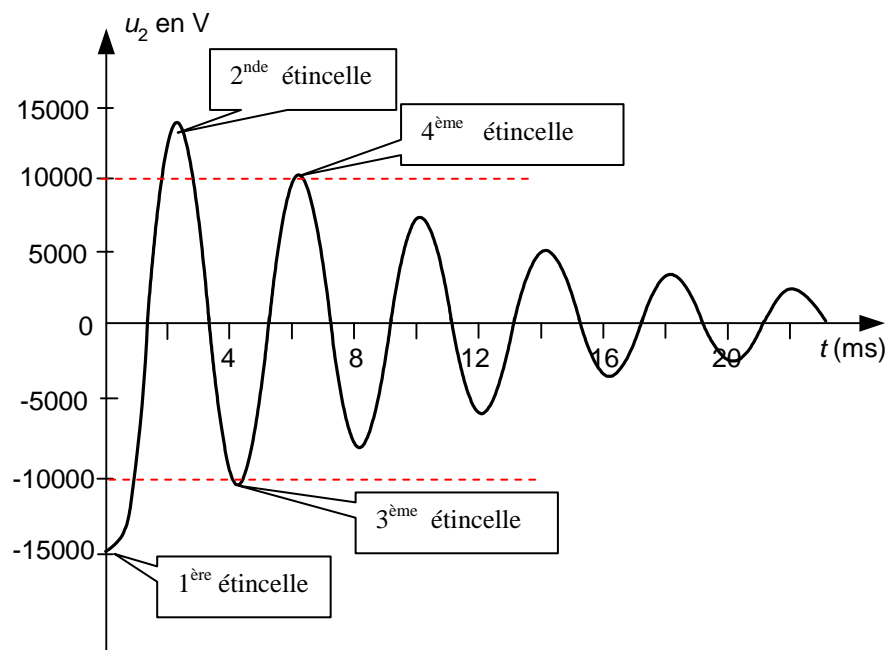
On a donc bien pour $u_2(t)$ une expression de la forme $u_2(t) = -A \cos\left(\frac{2\pi}{\gamma}t\right)$ avec $A = \alpha \cdot \frac{Q_0}{LC}$ qui est bien une constante positive ($\alpha > 0$).

2.1.6. La tension $u_2(t)$ est une fonction sinusoïdale, (0,25) il s'agit d'un régime périodique.



(0,25)

2.2. Cas où $r \neq 0$



2.2.1. (0,5) Il s'agit d'un régime **d'oscillations pseudo-périodiques**. L'amplitude de la tension $u_2(t)$ décroît au cours du temps car la résistance r du circuit est non-nulle. Une partie de l'énergie électromagnétique (somme de l'énergie magnétique stockée par la bobine et de l'énergie électrique stockée dans le condensateur) échangée dans le circuit rLC entre la bobine et le condensateur est dissipée sous forme de chaleur dans la résistance r par effet Joule.

2.2.2. (0,25) En présence du condensateur il y a un « train d'étincelles » aux bornes de la bougie plutôt qu'une étincelle unique car la tension $u_2(t)$ est sinusoïdale et une étincelle apparaît chaque fois que $|u_2| > 10\,000$ V. Cela correspond aux dates $t = 0$ ms, $t \approx 2,5$ ms, $t \approx 4$ ms et $t \approx 6$ ms.