

أكاديمية الدار البيضاء
نيابة ابن مسيك
ثانوية أبي شعيب الذكالي

ملاحظات مركزه في مادة

الرياضيات

السنة الثانية من سلك البكالوريا

◀ شعبة العلوم التجريبية

◀ مسلك علوم الحياة و الأرض

◀ مسلك العلوم الفيزيائية

◀ مسلك العلوم الزراعية

◀ شعبة العلوم و التكنولوجيات الصناعية

◀ مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية

◀ مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

من إعداد: الأستاذ محمد الكيال

www.allo-oustad.ma

وَأَنْزَلْنَاكَ الْقُرْآنَ فَذَكَرْهُ لَعَلَّكَ تَتَّقُونَ

www.allo-oustad.ma

الفهرس

الموضوع:	الصفحة:
إشارة حدانية - إشارة و تعميل ثلاثية الحدود	4
متطابقات هامة - مجموعة تعريف دالة	5
النهايات	6
الاتصال	8
الاشتقاق	10
محور التماثل - مركز التماثل - نقطة الانعطاف	12
الفروع اللانهائية	13
الدالة العكسية	14
دالة الجدر من الرتبة n	16
المتتاليات العددية	18
الدوال الأصلية	20
التكامل	22
الدوال اللوغاريتمية	24
الدوال الأسية	26
الأعداد العقدية	28
المعادلات التفاضلية	31
الهندسة الفضائية	32
التعداد	34
الاحتمالات	36
الحساب المثلثي	38

إشارة حدانية

ذ. محمد الكيال

إشارة و نعيميد ثنائية الحدود

← إشارة الحدانية: $ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

← إشارة و نعيميد ثنائية الحدود: $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

نضع: $P(x) = ax^2 + bx + c$

تعميل $P(x)$	إشارة $P(x)$	حل المعادلة: $x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 0$	المميز										
غير ممكن بواسطة حدانيتين	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$P(x)$</td> <td colspan="2">إشارة a</td> </tr> </tbody> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	إشارة a		$S = \emptyset$	$\Delta < 0$				
x	$-\infty$	$+\infty$											
$P(x)$	إشارة a												
$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>$-\frac{b}{a}$</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$P(x)$</td> <td>إشارة a</td> <td>0</td> <td>إشارة a</td> </tr> </tbody> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$P(x)$	إشارة a	0	إشارة a	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$\Delta = 0$		
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$										
$P(x)$	إشارة a	0	إشارة a										
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>x_1</th> <th>x_2</th> <th>$+\infty$</th> <th>$-\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$P(x)$</td> <td>إشارة a</td> <td>عكس إشارة a</td> <td>إشارة a</td> <td>إشارة a</td> </tr> </tbody> </table> <p>(نفترض أن: $x_1 < x_2$)</p>	x	x_1	x_2	$+\infty$	$-\infty$	$P(x)$	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a	إشارة a	$S = \{x_1; x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta > 0$
x	x_1	x_2	$+\infty$	$-\infty$									
$P(x)$	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a	إشارة a									

$\Delta = b^2 - 4ac$

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) $x \in \mathbb{R}$

فإن: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ و $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

منطباقات هامة

مجموعة تعريف دالة عددية

ذ. محمد الكيال

← منطباقات هامة:

لكل عددين حقيقيين a و b

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

← مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

لتكن P و Q حدوديتين

مجموعة تعريف الدالة f هي:	f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = P(x)$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt{P(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$	$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ و } Q(x) > 0\}$	$f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ و } Q(x) \neq 0\right\}$	$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

← نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

إذا كان n عددا فرديا فإن:	إذا كان n عددا زوجيا فإن:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

← نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$
هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$
هي نهاية حدها الأكبر درجة

← نهايات الدوال المثلثية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	---

← نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$
\sqrt{l}	$l \geq 0$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← النهايات و الترتيب:

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← العمليات على النهايات:

◆ نهاية مجموع الدالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شرح م

◆ نهاية جداء الدالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شرح م

◆ نهاية خارج الدالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شرح م	شرح م

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← الانصال في نقطة:

$$x_0 \text{ متصل في } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

➔ تعريف:

➔ الانصال على اليمين - الانصال على اليسار:

$$x_0 \text{ متصل على اليمين في } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \bullet$$

$$x_0 \text{ متصل على اليسار في } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \bullet$$

$$x_0 \text{ متصل في } f \Leftrightarrow x_0 \text{ متصل على اليمين و على اليسار في } f$$

← الانصال على مجال:

تكون f دالة متصلة على مجال مفتوح $]a, b[$ إذا كانت f متصلة في كل عنصر من المجال $]a, b[$

تكون f دالة متصلة على مجال مغلق $[a, b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a, b[$ و متصلة على اليمين في a و متصلة على اليسار في b

← العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

• الدوال $f + g$ و $f \times g$ و kf متصلة على المجال I

• إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

◆ **نتائج:**

• كل دالة حدودية متصلة على \mathbb{R}

• كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها

• الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+

• الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على \mathbb{R}

• الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

← انصال مركب دالتين:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

← صورة مجال بدالة منصلة:

• صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

• صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

◆ **حالات خاصة:** لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال $f(I)$		المجال I
f تناقصية قطعاً على I	f تزايدية قطعاً على I	
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$	$[a, b]$
$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$[a, b[$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$]a, b]$
$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$]a, b[$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$[a, +\infty[$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$]a, +\infty[$
$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$	$] -\infty, a]$
$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	\mathbb{R}

← مرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a, b]$ بحيث: $f(\alpha) = \beta$

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

◆ **نتيجة:**

← طريقة النقر الثاني:

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$

وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

إذا كان: $f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$

فإن: $\frac{b-a}{2} < \alpha < b$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$

يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ للحصول

على تأطير أدق للعدد α

إذا كان: $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$

فإن: $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$

يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ للحصول

على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها

← قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'(x_0)$

← معادل المماس لمنحنى دالة - الدالة التآلفية المماسية لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0
 ◆ معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 ◆ الدالة u المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 تسمى الدالة التآلفية المماسية لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 وهي تقريب للدالة f بجوار x_0

← قابلية الاشتقاق على اليمين - قابلية الاشتقاق على اليمين:

◆ نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'_d(x_0)$
 ◆ نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

← الاشتقاق و الانصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

← جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k \in \mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

← العمليات على الدوال المطبقة - مشتقة مركب دالتين - مشتقة دالة الجذر:

$(k \in \mathbb{R})$	$(ku)' = k(u)'$	$(u - v)' = u' - v'$	$(u + v)' = u' + v'$
	$(u^n)' = nu' \cdot u^{n-1}$		$(uv)' = u'v + uv'$
	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$		$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		$(u \circ v)' = [u' \circ v] \times v'$

← الاشتقاق و تغيرات دالة:

تكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I		
f تزايدية على المجال I	$\Leftrightarrow \forall x \in I$	$f'(x) \geq 0$ ◆
f تناقصية على المجال I	$\Leftrightarrow \forall x \in I$	$f'(x) \leq 0$ ◆
f ثابتة على المجال I	$\Leftrightarrow \forall x \in I$	$f'(x) = 0$ ◆

← الاشتقاق و التاويل الهندسي:

التاويل الهندسي للمنحنى (C_f) يقبل:	استنتاج	النهاية
مماسا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامل الموجه هو a	f قابلة للاشتقاق في x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$)
مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامل الموجه هو a	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$)
نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامل الموجه هو a	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$)
نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

محور التماثل – مركز التماثل

نقطة الانعطاف

ذ. محمد الكيال

← محور التماثل:

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

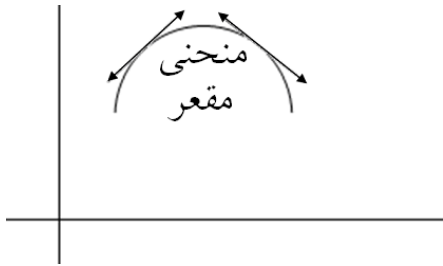
$$\begin{aligned} \forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f & \bullet \\ \forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x) & \bullet \end{aligned}$$

← مركز التماثل:

تكون النقطة $I(a, b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f & \bullet \\ \forall x \in D_f \quad f(2a - x) + f(x) = 2b & \bullet \end{aligned}$$

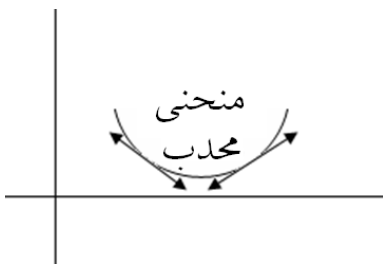
← التفرع – النذب – نقطة الانعطاف:



يكون منحنى دالة مقعرا على مجال إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$$

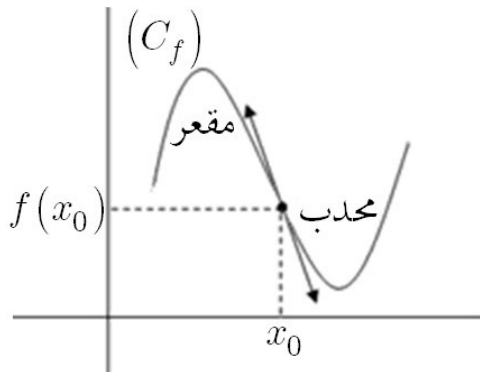
فإن: المنحنى (C_f) يكون مقعرا على المجال I



يكون منحنى دالة محدبا على مجال إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$$

فإن: المنحنى (C_f) يكون محدبا على المجال I



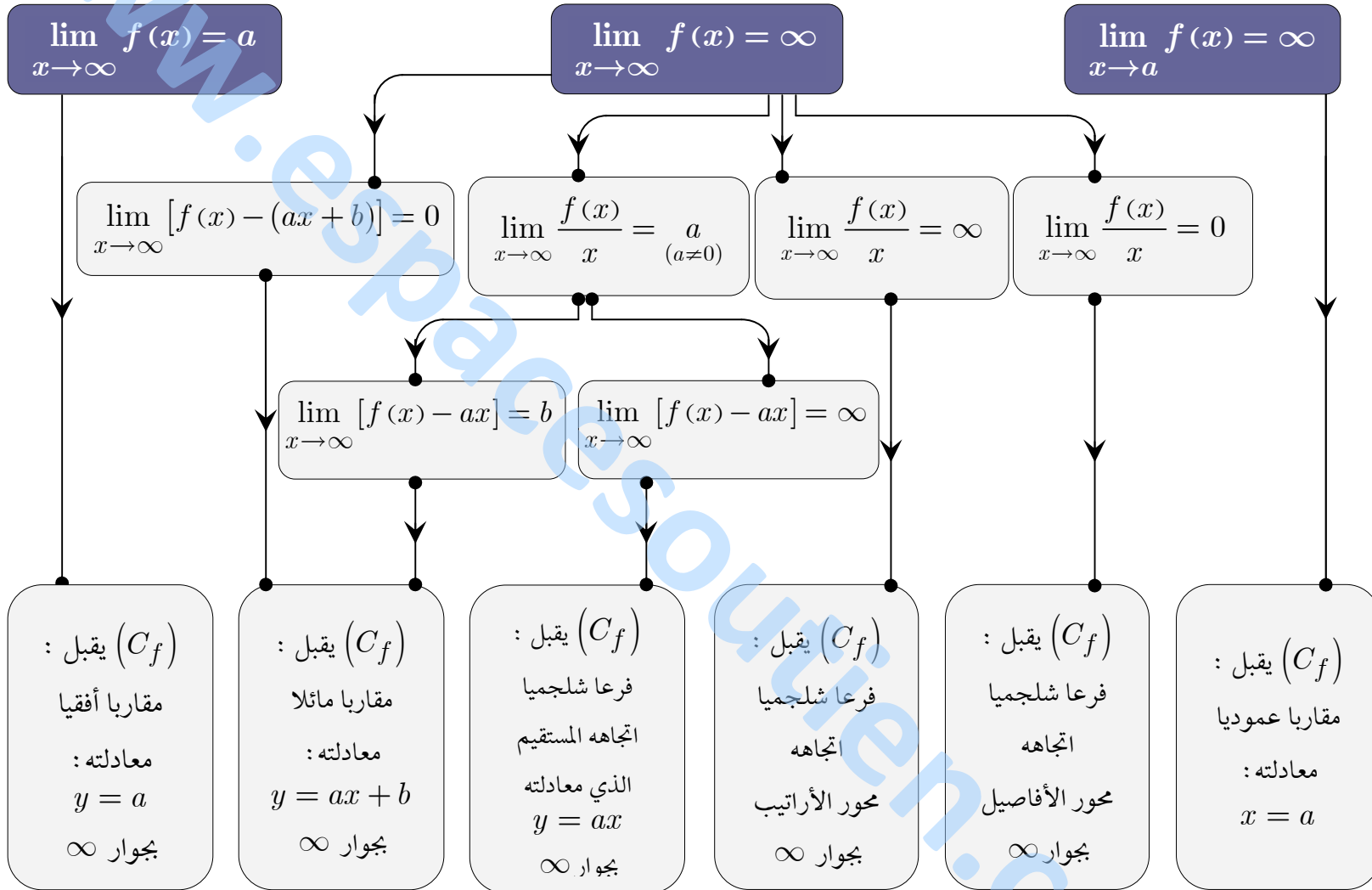
نقطة انعطاف منحنى دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها يتغير تقعر هذا المنحنى

إذا كانت f'' تنعدم في x_0 مع تغيير الإشارة

فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0

إذا كانت f' تنعدم في x_0 دون تغيير الإشارة

فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0



إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I
فإن f تقبل دالة عكسية معرفة من المجال $f(I)$ نحو المجال I
و يرمز لها بالرمز: f^{-1}

← خاصية:

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases} \bullet$$

◆ نتائج:

$$\forall x \in I \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \bullet$$

$$\forall y \in f(I) \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \bullet$$

← تحديد صيغة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I
ليكن x عنصراً من المجال $f(I)$ و y عنصراً من المجال I
بالاستعانة بالتكافؤ التالي: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$
و بتحديد y بدلالة x نستنتج صيغة $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من $f(I)$

← انصال الدالة العكسية:

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I
فإن الدالة العكسية f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$

← اشتقاق الدالة العكسية:

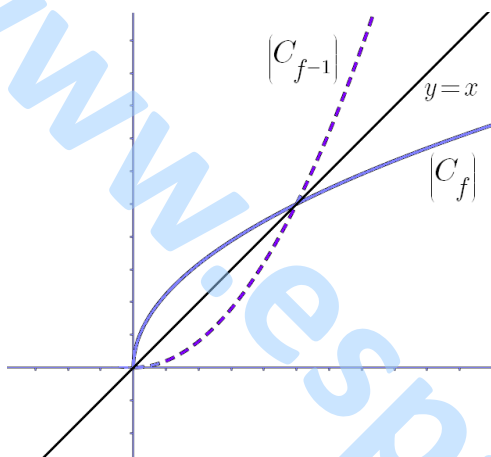
لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I
و ليكن x_0 عنصراً من المجال $f(I)$ و $y_0 = f(x_0)$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$
فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0
و لدينا: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على المجال I
فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$
و لدينا: $\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

← رتبة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعا على مجال I
الدالة العكسية f^{-1} لها نفس منحنى تغير الدالة f

← النميد اطباني للدالة العكسية:



لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعا على مجال I
التمثيلان المبيانيان للدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ممنظم
متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم

← ملاحظات هامة:

المنحنى $(C_{f^{-1}})$	←	المنحنى (C_f)
$A'(b, a) \in (C_{f^{-1}})$		$A(a, b) \in (C_f)$
يقبل مقاربا أفقيا معادلته: $y = a$		يقبل مقاربا عموديا معادلته: $x = a$
يقبل مقاربا عموديا معادلته: $x = b$		يقبل مقاربا أفقيا معادلته: $y = b$
يقبل مقاربا مائلا معادلته: $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ و يتم تحديد المعادلة انطلاقا من العلاقة: $x = ay + b$		يقبل مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$
يقبل مماسا (أو نصف مماس) أفقيا		يقبل مماسا (أو نصف مماس) عموديا
يقبل مماسا (أو نصف مماس) عموديا		يقبل مماسا (أو نصف مماس) أفقيا

دالة الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

ذ. محمد الكيال

القوى الجذرية

← خاصية وتعريف:

الدالة: $x \mapsto x^n$ المعرفة على \mathbb{R}^+ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n
 $\sqrt[n]{} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{}$
 $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

→ حالات خاصة:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$
- العدد: $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب ل x

← خاصيات:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

← مجموعة التعريف:

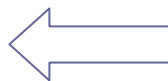
مجموعة تعريف الدالة f هي:	الدالة f معرفة كما يلي:
$D_f = [0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$

← النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$$

$$\sqrt[n]{\ell}$$

$$+\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$$

$$\ell \geq 0$$

$$+\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

← الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

← حل المعادلة: $x^n = a$ ($a \in \mathbb{R}$) $x \in \mathbb{R}$

n عدد زوجي	n عدد فردي	
$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$a > 0$
$S = \{0\}$	$S = \{0\}$	$a = 0$
$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{ a }\}$	$a < 0$

← القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عدداً جذرياً غير منعدم حيث: $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

◆ ملاحظتان:

- $\forall x \in]0; +\infty[\quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = [u(x)]^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$)

هي: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

$$(\sqrt[n]{u(x)})' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$$

لكل عنصرين x و y من \mathbb{R}_+^* ولكل عنصرين r و r' من \mathbb{Q}^*

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad \bullet \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'} \quad \bullet$$

$$(x \times y)^r = x^r \times y^r \quad \bullet \quad \left(\frac{x}{y} \right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad \bullet$$

$$\left(\frac{x^r}{x^{r'}} \right) = x^{r-r'} \quad \bullet \quad \frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'} \quad \bullet$$

← المثالية الحسابية – المثالية الهندسية:

لمتالية هندسية	لمتالية حسابية	
$u_{n+1} = q \times u_n$ هو الأساس q	$u_{n+1} = u_n + r$ هو الأساس r	تعريف
$u_n = u_p \times q^{n-p}$ ($p \leq n$)	$u_n = u_p + (n - p)r$ ($p \leq n$)	الحد العام
$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$ ($q \neq 1$)	$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$	مجموع حدود متتابعة
$b^2 = a \times c$	$2b = a + c$	a و b و c ثلاثة حدود متتابعة

← المثالية المكبورة – المثالية المصغورة:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية
M مكبورة بالعدد $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
m مصغورة بالعدد $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
$(u_n)_{n \in I}$ مكبورة و مصغورة \Leftrightarrow محدودة

← رتبة متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية
$(u_n)_{n \in I}$ تناقصية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
$(u_n)_{n \in I}$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
$(u_n)_{n \in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

← نهاية متتالية:

◆ نهاية المتتالية (n^α) حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

◆ نهاية المتتالية الهندسية (q^n) حيث: $q \in \mathbb{R}$:

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
المتتالية (q^n) ليس لها نهاية	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

← مصاديق التقارب:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

$$\left. \begin{array}{l} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

← متتالية من النوع $u_{n+1} = f(u_n)$:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $f(I) \subset I$ و a عنصرا من I

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها l حل للمعادلة: $f(x) = x$

← الدوال الأصلية لدالة منصلة على مجال:

◆ تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
 نقول أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I
 إذا تحقق الشرطان التاليان:

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

◆ خاصيات:

كل دالة متصلة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
 إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن:
 جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي:
 $x \mapsto F(x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I
 وليكن x_0 عنصرا من I و y_0 عنصرا من \mathbb{R}
 توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I
 تحقق الشرط البدئي: $F(x_0) = y_0$

← الدوال الأصلية: لمجموع الدالتين - لحداء دالة و عدد حقيقي:

◆ خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و k عددا حقيقيا
 إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على المجال I على التوالي فإن:

- $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I
- kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

← جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
x^r ($r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$

($k \in \mathbb{R}$)

← استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية:

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
$u'(x) \times [u(x)]^r$ ($r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$)	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + k$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\cos(ax + b)$ ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$\sin(ax + b)$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$

($k \in \mathbb{R}$)

← تكامل دالة متصلة على قطعة:

◆ **تعريف:**

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I و a و b عنصرين من المجال I تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

← خاصيات:

◆ **الخطائية:**

$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^a f(x) dx = 0$
$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	$(k \in \mathbb{R}) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

◆ **علاقة شال:**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

← التكام و الترتيب:

$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$: إذا كان	$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$: إذا كان
$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$: فإن	$\int_a^b f(x) dx \geq 0$: فإن

← القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$

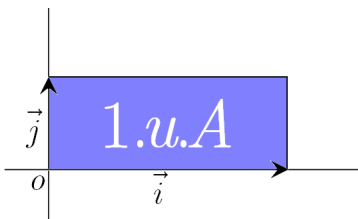
القيمة المتوسطة للدالة على المجال هي العدد الحقيقي: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

← التكامل بالأجزاء:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث الدالتين u' و v' متصلتين على المجال I و a و b عنصرين من المجال I

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

← مساحة حيز



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد (o, \vec{i}, \vec{j})

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة o والمتجهتين \vec{i} و \vec{j}

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a, b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين C_f و C_g ومحور
الأفصائل والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
 $x = a$ و $x = b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) \cdot u.A \quad \text{هي:}$$

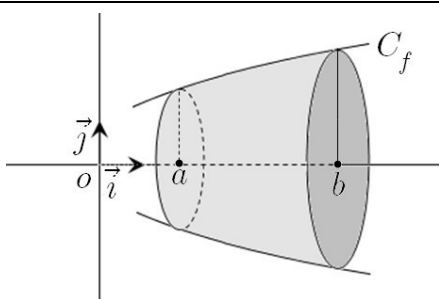
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور الأفصائل
والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
 $x = a$ و $x = b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) \cdot u.A \quad \text{هي:}$$

حالات خاصة:

مساحة الحيز البنفسجي في الرسم هي:	ملاحظات	رسم توضيحي
$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot u.A$	f موجبة على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) \cdot u.A$	f سالبة على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) \cdot u.A$	• f موجبة على المجال $[a, c]$ • f سالبة على المجال $[c, b]$	
$\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) \cdot u.A$	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) \cdot u.A$	• (C_f) فوق (C_g) على المجال $[a, c]$ • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[c, b]$	

حساب حجم:



حجم الجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور
الأفصائل دورة كاملة في مجال $[a; b]$

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v \quad \text{هو:}$$

uv : وحدة الحجم

← الدالة اللوغاريتمية النبرية

◆ **تعريف:**

دالة اللوغاريتم النبري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز: \ln

◆ **استنتاجات وخصائص:**

$\forall x \in]0; +\infty[$	$\forall y \in]0; +\infty[$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$		$\forall x \in]0; +\infty[$	$\forall y \in]0; +\infty[$
$(r \in \mathbb{Q}) \quad \ln(x^r) = r \ln x$		$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$	
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$		$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$		$\forall x \in]0; +\infty[$	$\forall y \in \mathbb{R}$
		$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln(x^n) = n \ln|x|$

◆ **مجموعة التعريف:**

مجموعة تعريف الدالة f هي:	الدالة f معرفة كما يلي:
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$	$f(x) = \ln[u(x)]$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) \neq 0\}$	$f(x) = \ln[(u(x))^2]$
	$f(x) = \ln u(x) $

◆ **نهايات أساسية:**

$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^n \ln x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

◆ **الانصاف:**

الدالة $\ln x$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$

لتكن u دالة معرفة على مجال I إذا كانت u موجبة قطعاً و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق: ◆

لتكن u دالة معرفة على مجال I
 إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I
 فإن: الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I
 $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ولدينا:

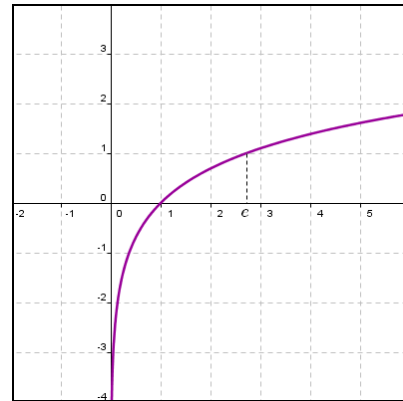
الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$
 ولدينا:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

إشارة \ln : ◆

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

النمط المبياني: ◆



الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: \log_a

تعريف: ◆

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

حيث:

استنتاجات وخاصيات: ◆

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$	$\log_a 1 = 0$
$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a a = 1$
$(r \in \mathbb{Q}) \quad \log_a(x^r) = r \log_a x$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$
$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$	$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

نهايات و منافونات: ◆

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

المشتقة: ◆

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

← الدالة اللوغاريتمية النبيرة

◆ تعريف:

الدالة الأسية النبيرة هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية النبيرة

و يرمز لها بالرمز: \exp

نضع لكل x من \mathbb{R}

$$\exp(x) = e^x$$

◆ استنتاجات و خصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$
$(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx}$	$\forall x \in]0, +\infty[\quad e^{\ln x} = x$
$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

◆ مجموعة التعريف:

مجموعة تعريف الدالة f هي:	الدالة f معرفة كما يلي:
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$	$f(x) = e^{u(x)}$

◆ نهايات أساسية:

$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) = 0$
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

◆ الانصال:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على \mathbb{R}

لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

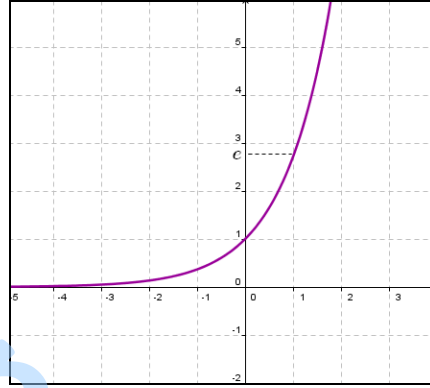
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x \text{ ولدينا: } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن: الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)} \text{ ولدينا:}$$

النموذج الطيباني للدالة \ln :



← الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف: الدالة العكسية للدالة \log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a ويرمز لها بالرمز: \exp_a

$$\exp_a(x) = a^x \quad \mathbb{R} \text{ نضع لكل } x \text{ من}$$

استنتاجات وخصائص:

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad (a^x)^r = a^{rx}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a(a^x) = x$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^{\log_a(x)} = x$
	$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

نهايات و متناقضات:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

$$(a^x)' = (\ln a) \times a^x$$

المشتقة:

مجموعة الأعداد العقدية هي: $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1\}$

← الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- العدد $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ويرمز له بالرمز: $\text{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ويرمز له بالرمز: $\text{Im}(z)$

حالات خاصة:

- إذا كان: $\text{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي
- إذا كان: $\text{Re}(z) = 0$ و $\text{Im}(z) \neq 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

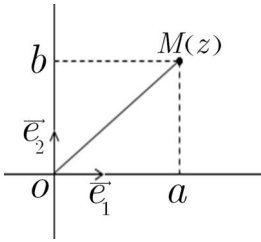
← تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ و } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$

← التمثيل المبراني لعدد عقدي:

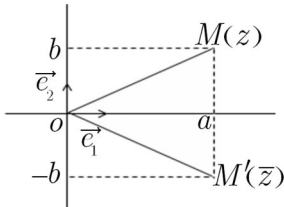
ليكن المستوى العقدي منسوباً إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a, b)$

- العدد z يسمى لحن النقطة M والنقطة M تسمى صورة العدد z ونكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحن المتجهة \vec{OM} ونكتب: $z = \text{Aff}(\vec{OM})$ أو $\vec{OM}(z)$



← مرافق عدد عقدي:

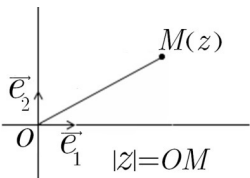
ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\bar{z} = a - ib$

$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

<ul style="list-style-type: none"> • $z \Leftrightarrow \bar{z} = z$ عدد حقيقي • $z \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ عدد تخيلي صرف • $z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$ • $z\bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ • $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) • $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ ($z' \neq 0$)
---	--

← معيار عدد عقدي:

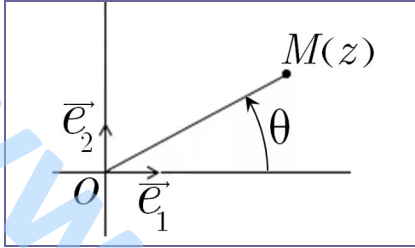


ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} |z \times z'| &= |z| \times |z'| & |z^n| &= |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ |\bar{z}| &= |z| & |-z| &= |z| \\ \left| \frac{1}{z'} \right| &= \frac{1}{|z'|} & \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) \end{aligned}$$

← الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:



ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M
عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$
و نرمز له بالرمز: $\arg z$
ونكتب: $\arg z = \theta [2\pi]$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a < 0$	$a > 0$
$a = [-a, \pi]$	$a = [a, 0]$
$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$

ليكن z عددا عقديا غير منعدم
نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta [2\pi]$
• الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو:
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$
• الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$ $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$ $[\overline{r}, \theta] = [r, -\theta]$ $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$ $[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$ $\frac{1}{[r'; \theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$ $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z') [2\pi]$ $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$ $-\arg z \equiv (\pi + \arg z) [2\pi]$ $\arg z^n \equiv n \arg z [2\pi]$ $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$ $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') [2\pi]$
--	---	---

$z \Leftrightarrow \arg z = k\pi$ عدد حقيقي $(k \in \mathbb{Z})$
 $z \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ عدد تخيلي صرف $(k \in \mathbb{Z})$
 $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

← صيغة أولر:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned} \text{ و}$$

← صيغة موافق:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

← حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$:

المعادلة:	مجموعة حلول المعادلة:
$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$

حل المعادلة: $az^2 + bz + c = 0$ حيث $z \in \mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية ($a \neq 0$)

المعادلة:	مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)	$\Delta > 0$ $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$ $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$ $S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$AB = z_B - z_A $	المسافة AB
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[A; B]$
$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$	قياس الزاوية $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A و B و C نقط مستقيمة
$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$	A و B و C و D نقط متداورة

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
$AM = r$ M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r	$ z - z_A = r$ ($r > 0$)
$AM = BM$ M تنتمي إلى واسط $[AB]$	$ z - z_A = z - z_B $
ABC مثلث قائم الزاوية في A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$
ABC مثلث متساوي الساقين في A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$
ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$

تمثيلان عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل	تمثيله العقدي هو:
الإزاحة t ذات المتجهة \vec{u}	$z' = z + b$ حيث b لحق المتجهة \vec{u}
التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k	$z' - \omega = k(z - \omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω
الدوران r الذي مركزه Ω و زاويته θ	$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω

المعادلة التفاضلية:	الحل العام للمعادلة التفاضلية:
$y' = ay + b$ $(a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

المعادلة التفاضلية:	معادلتها المميزة:	المعادلة المميزة تقبل:	الحل العام للمعادلة التفاضلية:
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = a^2 - 4b)$	$\Delta > 0$ حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$ حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$ حلين عقديين مترافقين: $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

في سياق هذا الملخص ليكن الفضاء منسوباً إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

← الصيغة التحليلية ل: الجداء السلمي - منظم منتهة - الجداء المتجهي

لتكن $\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$ متجهتين من \mathcal{V}_3

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$$

← المسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

المسافة نقطة M عن مستوى (P) معادلته $ax + by + cz + d = 0$ هي:

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

المسافة نقطة M عن مستقيم $\Delta(A, \vec{u})$ هي:

$$d(A, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

← معادلة مستوى:

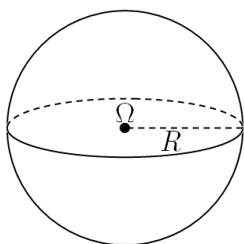
$(P) : ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(a, b, c)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمة فإن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

يمكن تحديد معادلة المستوى (ABC) بالاستعانة بالتكافؤ التالي:

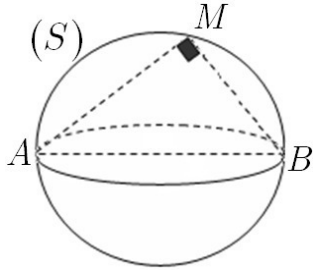
$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

← معادلة فلكة:



معادلة فلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ و شعاعها R هي:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



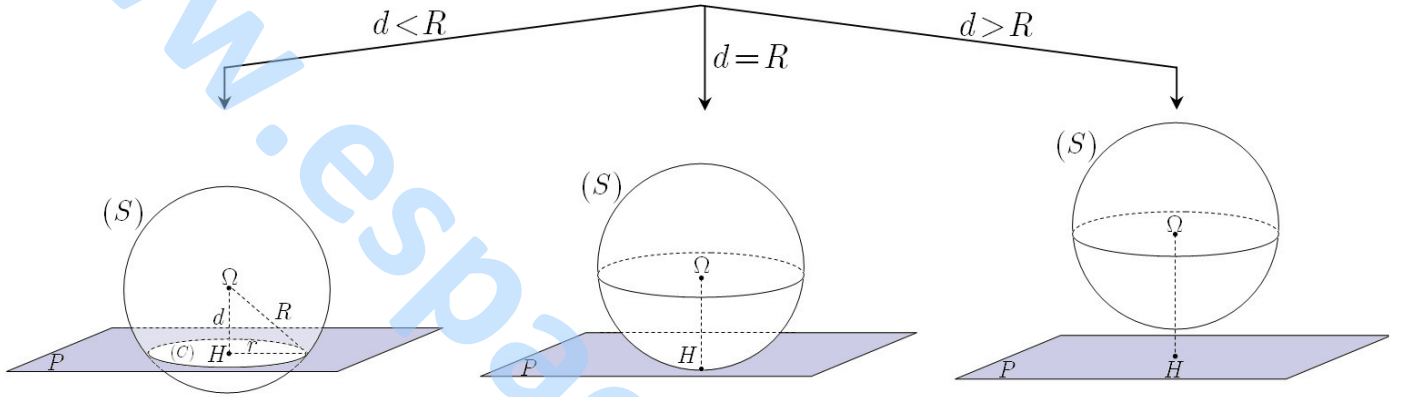
معادلة فلكة (S) أحد أقطارها [AB] يمكن تحديدها بالاستعانة
بالتكافؤ التالي: $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

ملاحظة: الفلكة (S) مركزها Ω منتصف [AB] وشعاعها $\frac{AB}{2}$

← تقاطع فلكة (S) و مستوى (P): $ax + by + cz + d = 0$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega; (P))$



المستوى (P) يقطع الفلكة (S)
وفق دائرة (C)
مركزها: H
وشعاعها: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

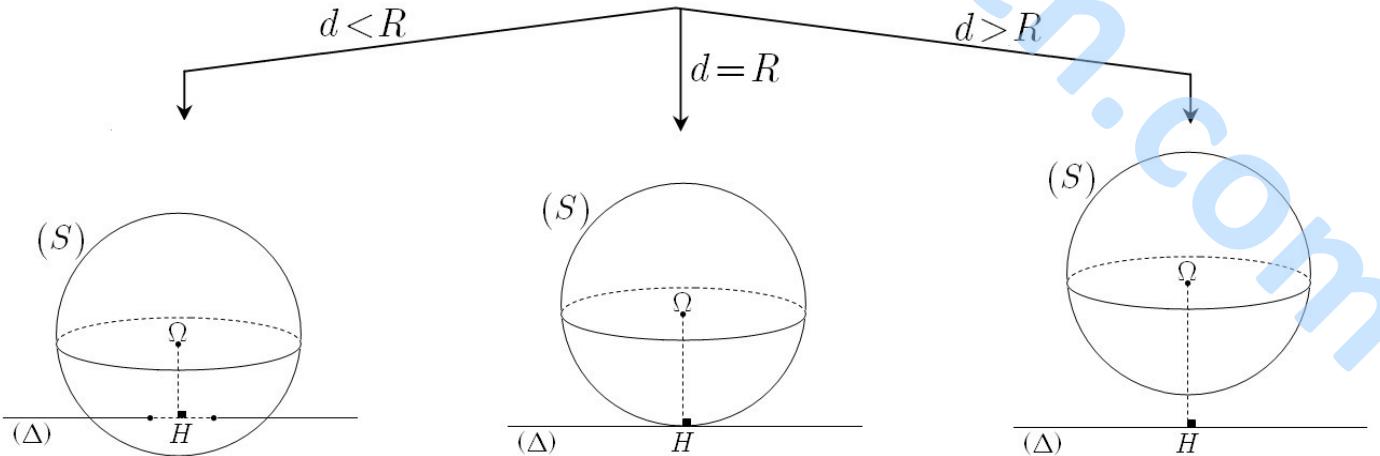
المستوى (P) مماس للفلكة (S)
في النقطة H

المستوى (P) و الفلكة (S)
لا يتقاطعان

← تقاطع فلكة (S) و مستقيم (Delta):

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Delta)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega; (\Delta))$



المستقيم (Delta) يقطع الفلكة (S)
في نقطتين مختلفتين

المستقيم (Delta) مماس للفلكة (S)
في النقطة H

المستقيم (Delta) الفلكة (S)
لا يتقاطعان

← رئيسي مجموعة:

◆ تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $CardE$

$$Card\emptyset = 0 \quad \text{حالة خاصة:}$$

◆ خاصية:

و A و B مجموعتان منتهيتان

$$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$$

← منهم مجموعة:

◆ تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: \bar{A}

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\} \quad \text{حيث}$$

◆ ملاحظان:

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = E$
- $card\bar{A} = cardE - cardA$

← ابدأ الأساسي للعداد:

 $(p \in \mathbb{N}^*)$ نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختياراإذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفةو كان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفةو كان الاختيار p يتم ب n_p كيفية مختلفةفإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

← الترتيبات بتكرار - الترتيبات بدون تكرار:

◆ الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من \mathbb{N}^* ($p \leq n$)عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

الترتيبات بدون تكرار:

ليكن n و p عنصرين من \mathbb{N}^* ($p \leq n$)
 عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو:

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{\text{من العوامل } p}$$

حالة خاصة:

كل ترتيبية بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر
 و عددها: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

← التاليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n
 كل جزء A من E عدد عناصره p ($p \leq n$)
 يسمى تاليف ل p عنصر من بين n عنصر
 و عدد هذه التاليفات هو: $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

← الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p

$n \in \mathbb{N}^*$ $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ $0! = 1$			
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$		$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^n = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$		$C_n^p = C_n^{n-p}$	

← بعض أنواع السحب:

نسحب p عنصر من بين n عنصر ($p \leq n$)

نلخص النتائج في الجدول التالي:

الترتيب	عدد السحبات الممكنة هو:	نوع السحب:
غير مهم	C_n^p	آني
مهم	n^p	بالتتابع و بإحلال
مهم	A_n^p	بالتتابع و بدون إحلال

← مصطلحات

المصطلح الاحتمالي :	معناه :
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانات	هي مجموعة الإمكانات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	جزء من كون الإمكانات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A \cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A \cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث \bar{A} ($A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$)
A و B حدثان غير منسجمين	$A \cap B = \emptyset$

← استقرار حدث - ائمال حدث:

◆ تعريف:

- ليكن Ω كون إمكانات تجربة عشوائية
- عندما يستقر احتمال حدث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو: p_i ونكتب: $P(\{\omega_i\}) = p_i$
 - احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث أي إذا كان $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو: $p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots + p(\omega_n)$

◆ خاصيات:

- ليكن Ω كون إمكانات تجربة عشوائية
- $p(\Omega) = 1$ و $p(\emptyset) = 0$
 - $0 \leq p(A) \leq 1$ لكل حدث A من Ω
 - احتمال اتحاد حدثين:
لكل حدثين A و B من Ω
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
إذا كان A و B غير منسجمين $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
 - احتمال الحدث المضاد:
لكل حدث A من Ω :
 $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

← فرضية نساوي الاحتمالات:

◆ تعريف:

- إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω
- فإن احتمال كل حدث A من Ω هو:
- $$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$$

← الاحتمال الشرطي - استقلالية حدثين:

◆ **تعريف:** ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \neq 0$
احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد: $p(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

◆ **نتيجة:** لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \times p(B) \neq 0$
لدينا: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A) = p(B) \times p(A/B)$

◆ **تعريف:** لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية
 B و A حدثان مستقلان $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

◆ **خاصية:** ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيثا ل Ω
($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ و $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$)
لكل حدث A من Ω : $p(A) = p(\Omega_1) \times p(A/\Omega_1) + p(\Omega_2) \times p(A/\Omega_2)$

← الاختيارات المتكررة:

ليكن A حدثا في تجربة عشوائية احتمالها p
إذا أعيدت هذه التجربة n مرة فإن احتمال تحقق الحدث A , k مرة بالضبط هو:
 $C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k}$ ($k \leq n$)

← قانون الاحتمال متغير عشوائي:

ليكن متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية
لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين:
• تحديد $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
• نحسب الاحتمال $p(X = x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1; 2; \dots; n\}$

← الأمل الرياضي - المتغيرة - الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه
معرف بالجدول التالي:

◆ **تعريف:** الأمل الرياضي للمتغير X : $E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$

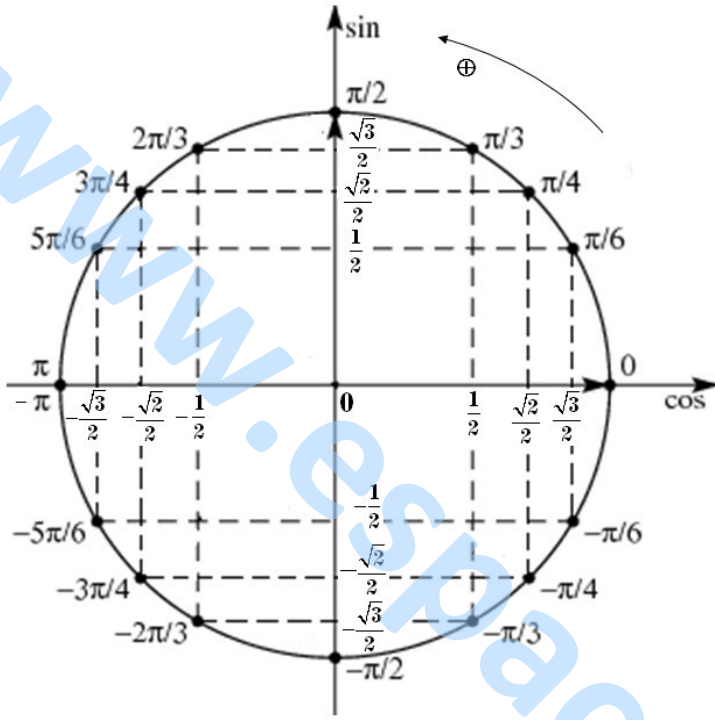
المتغيرة للمتغير X : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

الانحراف الطرازي للمتغير X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

← القانون الحداني:

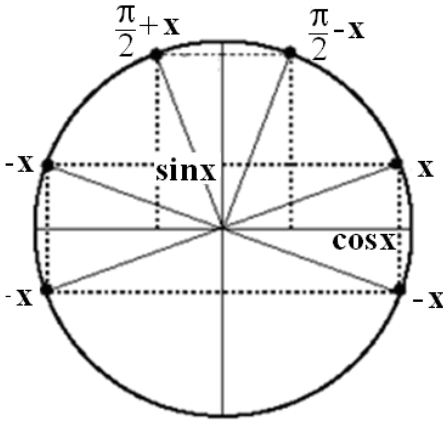
ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية. نعيد هذه التجربة n مرة
المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p
ولدينا $\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
و $E(X) = n \times p$ و $V(X) = np(1-p)$

← جدول القيم الاعتيادية و الدائرة المثلثية:



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

← العلاقات بين النسب المثلثية:



	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
\sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
\cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

← معادلات مثلثية اساسية:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ أو } x = -a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ أو } x = (\pi - a) + 2k\pi$$

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

← صيغة تحويل مجموع:

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b \\ \tan(a - b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b \\ \tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}\end{aligned}$$

← نتائج:

بوضع: $t = \tan \frac{a}{2}$

$$\begin{aligned}\sin a &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos a &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \tan a &= \frac{2t}{1 - t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \times \cos a \\ \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \\ \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}\end{aligned}$$

← تحويل مجموع إلى جداء:

← تحويل جداء إلى مجموع:

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \cos \left(\frac{p - q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \left(\frac{p + q}{2} \right) \sin \left(\frac{p - q}{2} \right) \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \left(\frac{p + q}{2} \right) \cos \left(\frac{p - q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \sin \left(\frac{p - q}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos a \times \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ \sin a \times \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)] \\ \sin a \times \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \\ \cos a \times \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]\end{aligned}$$

$(a, b) \neq (0, 0)$

← تحويل: $a \cos x + b \sin x$

$$\begin{aligned}a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)\end{aligned}$$

حيث α عدد حقيقي يحقق:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$