

الإمتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية – خيار فرنسية
الدورة العادية 2019
- الموضوع -



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

NS22F

3	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية – خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques	11 points

- ✓ In désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(1, -1, -1)$, $B(0, -2, 1)$ et $C(1, -2, 0)$

- 0.75 1) a) Montrer que $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
- 0.5 b) En déduire que $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2) Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$
- 0.75 Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2, -1, 1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{5}$
- 0.5 3) a) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC)
- 0.5 b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 2 : (3 points)

- 0.75 1) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$
- 0.5 a) Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$
- 0.25 b) En déduire que les points A, C et D sont alignés .
- 3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$
- 0.5 Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$
- 4) Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$
- 0.5 a) Vérifier que $h = ip$
- 0.5 b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes , six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher . On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne .

On considère les événements suivants : A : « Obtenir trois boules vertes . »

B : « Obtenir trois boules de même couleur . »

C : « Obtenir au moins deux boules de même couleur . »

2 1) Montrer que $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$

1 2) Calculer $p(C)$.

Problème : (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1 cm)

0.5 1) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

0.25 2) a) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$

0.5 b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

0.5 c) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

0.75 d) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$

0.5 3) a) Montrer que pour tout x de $]0, 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$
et que pour tout x de $[1, +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$

1 b) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$

0.5 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 4) a) Montrer que $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0.5 b) En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .

0.5 5) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

1 b) Construire (Δ) et (C) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})

0.5 6) a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$

0.75 b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

0.5 c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5

1) a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante .

0.5

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente .

0.75

2) Calculer la limite de la suite (u_n) .