Raisonnements mathématiques

Omar Mouchtaki

Voyons quelques types de raisonnement classiques qu'on peut utiliser en mathématiques.

1 Le raisonnement par récurrence

Dans la plupart des domaines mathématiques, il faut souvent démontrer des propositions sur tous les entiers. Pour ce faire, il est parfois intéressant de suivre un raisonnement "de proche en proche". L'idée est qu'on va s'aider du fait que la proposition est vraie pour un entier n afin de la montrer pour l'entier suivant $n+1$. C'est ce qu'on appelle le raisonnement par récurrence.

Le formalisme mathématique est le suivant :
On note $P(n)$ une propriété qui dépend de n. Par exemple :

$$P(n) : \text{"si } n \text{ est premier alors } n \text{ est impair."}$$

Nous voyons que la proposition P est vraie pour tous les entiers sauf pour 2 puisque 2 est premier et pair.
Si nous voulons montrer pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ que la proposition $P(n)$ est vraie, le principe de récurrence nous indique qu'il suffit d'effectuer les deux étapes suivantes :
- **Initialisation :** On vérifie que $P(0)$ est vraie. Remarquons qu'il ne s'agit pas forcément de $P(0)$ mais de $P(n_0)$ où n_0 est le premier entier pour lequel la propriété est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre qu'alors $P(n+1)$ est vraie. $P(n)$ doit nous servir à démontrer $P(n+1)$.

Remarque 1. *Pour mieux comprendre ce qu'est un raisonnement par récurrence, il peut être utile de garder en mémoire l'image suivante.*
Supposons que nous soyons devant une échelle infinie et que je veuille vous démontrer que je suis capable de grimper arbitrairement haut. Une mauvaise idée consisterait à monter les échelons les uns après les autres car je n'arriverais jamais au sommet de l'échelle en temps fini... Néanmoins, si je vous montre que je suis capable de me mettre sur une marche de l'échelle (la première par exemple) et si je vous montre qu'à partir d'une marche quelconque, je sais passer à la marche suivante, alors vous pourrez considérer que je sais gravir une échelle infinie !
Le fait de savoir monter sur la première marche symbolise l'initialisation et le fait de savoir passer d'une marche à la suivante représente l'hérédité.

Exemple 1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

Calculer u_n *en fonction de* u_0 *et de* n.

Reprenons l'image précédente. Pour trouver comment monter à l'échelle, il est bon de s'intéresser aux premières marches. Autrement dit, on doit d'abord tester les premières valeurs

($n = 0, 1, 2\ldots$) pour savoir ce qu'on veut démontrer. C'est une démarche importante dans toute résolution de problème.
Ici, on a : $u_1 = u_0^2$, $u_2 = u_1^2 = u_0^4$, $u_3 = u_2^2 = u_0^8$.
Avec les premiers termes, on a donc l'intuition que $u_n = u_0^{2^n}$. Montrons-le par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on obtient bien que $u_0 = u_0$.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang p. Montrons-la au rang $p+1$, c'est-à-dire montrons que $u_{p+1} = u_0^{2^{p+1}}$.
On sait que $u_{p+1} = u_p^2$. Or, l'hypothèse de récurrence nous dit que $u_p = u_0^{2^p}$. Par conséquent, $u_{p+1} = (u_0^{2^p})^2 = u_0^{2^{p+1}}$. D'où l'hérédité.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0^{2^n}$.

2 Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est un autre type de raisonnement très utile pour rédiger proprement certains exercices. Afin de montrer qu'une proposition est fausse, on suppose par l'absurde qu'elle est vraie et on raisonne jusqu'à amener une contradiction. On peut alors dire que la proposition que nous avons supposée est fausse.

Exemple 2. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers. On peut les noter $p_1, \ldots, p_n$. Considérons le nombre

$$N = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

On sait alors que $N+1$ n'est divisible par aucun p_i puisque les p_i divisent N (la démonstration de cet énoncé est un exercice simple d'arithmétique laissé au lecteur). Par conséquent $N+1$ n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que lui et il est strictement supérieur à 1. $N+1$ est donc premier. Or comme $N+1$ est plus grand que tous les p_i, on vient de construire un nombre qui n'est pas dans l'ensemble énoncé plus tôt, ce qui contredit l'existence d'un nombre fini n de nombres premiers. Par conséquent, il existe une infinité de nombres premiers.

Exemple 3. *Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.*

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Par définition des rationnels, on peut donc trouver $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que p et q soient premiers entre eux et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Alors $2q^2 = p^2$, donc 2 divise p^2. De ce fait, 2 divise p (ceci sera démontré au paragraphe suivant). On peut ainsi écrire $p = 2k$. D'où l'équation :

$$q^2 = 2k^2.$$

Donc 2 divise q^2 et donc q aussi. Par conséquent, 2 divise q et p, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3 Le raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposée repose sur la proposition suivante.

Proposition 1. *Ces deux propositions sont sémantiquement équivalentes :*

1. $A \Rightarrow B$

2. non $B \Rightarrow$ non A

En pratique, cette proposition vient de la logique mathématique qui coïncide avec la logique quotidienne. "Si j'ai faim, alors je mange" est logiquement équivalent à la phrase "Si je ne mange pas, alors je n'ai pas faim".

Remarque 2. ***Attention :*** *il ne faut jamais dire que la contraposée de $A \Rightarrow B$ est non $A \Rightarrow$ non B. Avec l'exemple précédent, on obtiendrait la proposition "Si je n'ai pas faim alors je ne mange pas" qui ne dit pas la même chose que la proposition "si j'ai faim alors je mange".*

Je recommande vivement au lecteur de réfléchir à ces petites subtilités sur des exemples assez simples pour ne pas faire d'erreurs parfois lourdes de conséquences.

Exemple 4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.*

Ici, il est possible de faire le raisonnement directement, mais la contraposée rend la preuve beaucoup plus simple. D'après la proposition ci-dessus, il suffit de montrer que si n est impair, alors n^2 est aussi impair.

Pour cela, écrivons $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ puisque n est impair. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est bien un nombre impair.

4 Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse sert à démontrer l'existence d'un objet. Cette méthode se divise en deux parties.

— **Analyse :** on suppose dans un premier temps l'existence de l'objet souhaité. À l'aide des propriétés qu'il est censé vérifier, on obtient autant d'informations que possible sur la façon de construire un tel objet.

— **Synthèse :** lorsqu'on a suffisamment d'informations sur l'objet recherché, on le construit explicitement et on vérifie qu'il répond au problème.

Bonus : si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet recherché sans alternative possible, on a même démontré l'unicité de cet objet.

Exemple 5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $I = [-a, a]$. Montrer que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Analyse : Soient g une fonction paire et h une fonction impaire telles que $f = g + h$. On a alors que pour tout $x \in I, f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. On a donc un système de 2 équations à 2 inconnues. Sa résolution nous donne :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Bonus : Nous savons ici que nous avons unicité sous réserve d'existence car g et h sont définis de manière unique par f.

Synthèse : Posons

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

On vérifie aisément que g est paire, que h est impaire et que $f = g + h$, ce qui permet de conclure la preuve.