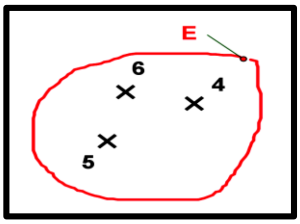
درس : المجموعات

I. تحديد مجموعة:

A. نشاط و مفردات:



لتكن E مجموعة الأعداد الصحيح الطبيعية المحصورة قطعا بين 3 و 7 .
أكتب هذه المجموعة بطريقتين مختلفتين.

- نكتب المجموعة على الشكل التالي $E=\{4,5,6\}$. نقول أن E كتبت بالتفصيل **écriture en extension**
- نكتب E على الشكل: $E=\{n\in\mathbb{N}/3<n<7\}$. نقول أننا عرفنا E بالإدراك **écriture en compréhension**.
- يمكن أن نمثل بعض المجموعات على الشكل التالي: كل عنصر من E نكتبه في مكان ما ونضع بجواره الرمز $\times$. أو • وتحاط كل العناصر بخط و خارج ذلك نكتب رمز المجموعة E . والشكل المحصل عليه يسمى مخطط فان **diagramme deVenn**

B. تمرين تطبيقي:

1. أكتب المجموعة التالية بالإدراك : أ - $F=]-5,5[$. ب - $A=\{0,2,4,6,\cdots\}$

أكتب المجموعة التالية بالتفصيل : أ - $B=\{d\in\mathbb{N}/\exists k\in\mathbb{N},20=k\times d\}$. ب $C=\{p\in\mathbb{Z}/(p-3)(2p-5)=0\}$

II. التضمن – التضمن المزدوج (التساوي) – مجموعة أجزاء مجموعة:

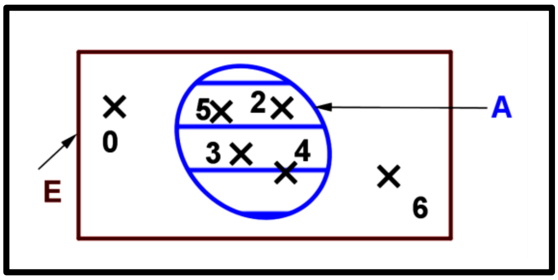
A. التضمن – L ' INCLUSION – التضمن المزدوج (أو التساوي) DOUBLE INCLUSION

1. تعريف:

نقول إن مجموعة A ضمن مجموعة B إذا وفقط إذا كان كل عنصر x من A فهو ينتمي إلى B ؛ و نكتب $A\subset B$.
إذن: $A\subset B\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)$.

2. مثال:

نعتبر المجموعات التالية: $E=\{0,2,3,4,5,6\}$ ؛ $A=\{2,3,4,5\}$.
نمثل E و A .



B. التساوي (أو التضمن المزدوج)

1. تعريف:

نقول إن مجموعتين A و B متساويتين يكافئ $A\subset B$ و $B\subset A$.
إذن: $A=B\Leftrightarrow\ (A\subset B$ و $B\subset A)$

2. ملحوظة:

التضمن متعدي: $(A\subset B$ و $B\subset C)\Rightarrow A\subset C$

3. تمرين تطبيقي:

نعتبر المجموعتين: $F=]0,1[$ و $E=\left\{\frac{1}{x}/x\in\mathbb{R}\right.$ و $\left.x>1\right\}$

بين أن: $E=F$.

$\subset$ نبين أن: $E\subset F$.

نعتبر $y\in E$ إذن $y=\frac{1}{x}$ حيث $x>1$. ومنه $\frac{1}{x}>0$ و $\frac{1}{x}<1$.

و بالتالي: $0<\frac{1}{x}<1$. إذن: $0<y<1$

خلاصة 1 : $E\subset F$.

$\supset$ نبين أن: $F\subset E$.

ليكن: $y\in F$ إذن: $0<y<1$.

نضع : $y=\frac{1}{x}$ ومنه: $\frac{1}{x}<1$ و بالتالي: $x>1$. ومنه : y يكتب على شكل $\frac{1}{x}$ مع $x>1$ ؛ بالتالي $y\in E$.

خلاصة 2 : $F\subset E$.

خلاصة : $E\subset F$ و $F\subset E$ إذن: $E=F$.

C. مجموعة أجزاء مجموعة:

1. نشاط:

نعتبر المجموعة: $E=\{1,2,3\}$. أو جد جميع أجزاء E.

2. تعريف:

E مجموعة.
جميع أجزاء E تكون مجموعة تسمى مجموعة أجزاء E و يرمز لها ب: $\mathcal{P}(E)$.
إذن: $A\in\mathcal{P}(E)\Leftrightarrow A\subset E$

3. ملحوظة:

- عناصر $\mathcal{P}(E)$ هي أجزاء (أي على شكل مجموعات).
- $E=\varnothing$. $\mathcal{P}(E)=\{\varnothing\}$

4. تمرين تطبيق:

1. أكتب بالتفصيل: $\mathcal{P}(E)$ حيث:

أ- $E=\{2\}$. ب- $E=\{\varnothing\}$. ج - $E=\{1,2\}$

جواب :

أ - $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\{2\})=\{\varnothing,\{2\}\}$.

ب- $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

ج- $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\{1,2\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

د- $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\{\{1,2\}\})=\{\varnothing,\{1,2\}\}$

III. العمليات على المجموعات:

A. التقاطع :

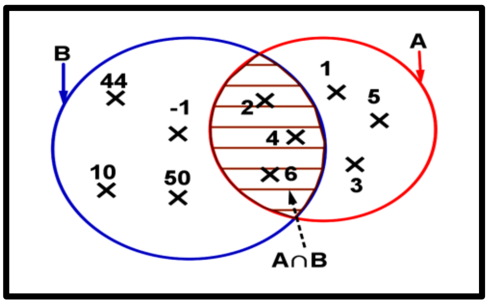
1. تعريف:

A و B مجموعتان.
العناصر المشتركة ل A و B تكون مجموعة تسمى تقاطع A و B ويرمز لها ب : $A\cap B$.
إذن: $A\cap B=\{x/x\in A$ و $x\in B\}$.

2. ملحوظة: $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$ و $x\in B$ (نستعملها في التمارين)

3. مثال:

نأخذ: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $B=\{-1,2,4,6,44,50\}$



4. تمرين تطبيقي :

$A=\{p\in\mathbb{Z}/2\le|p|\le5\}$. حدد التقاطع : $A\cap]-\infty,3[$.

5. خاصيات:

-1 $A\cap\varnothing=\varnothing$ ؛ $A\cap A=A$.

-2 $A\cap B\subset A$ و $A\cap B\subset B$.

-3 $A\cap B=B\cap A$. التقاطع تبادلي

-4 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

6. برهان للتجمعية :

جواب:

4) نبين أن: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (نرمز للعطف ب $\wedge$ و بالفصل ب $\vee$)

لدينا :

$x\in(A\cap B)\cap C\Leftrightarrow x\in A\cap B\ \wedge\ x\in C$ (حسب تعريف التقاطع)

$\Leftrightarrow(x\in A\ \wedge\ x\in B)\wedge x\in C$ (حسب تعريف التقاطع)

$\Leftrightarrow x\in A\ \wedge\ (x\in B\wedge x\in C)$ (العطف تجميعي)

ومنه : $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

B. الاتحاد:

1. تعريف:

A و B مجموعتان.

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B تسمى اتحاد المجموعتين A و B و يرمز لها ب : $A\cup B$.

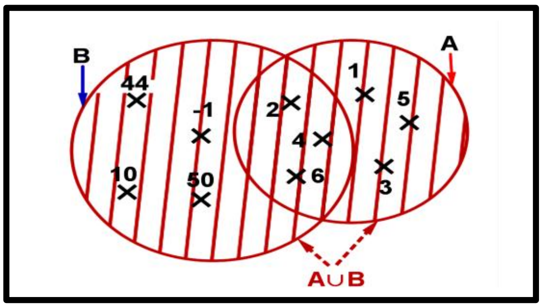
إذن: $A\cup B=\{x/x\in A$ أو $x\in B\}$.

2. ملحوظة: $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ أو $x\in B$. (نستعملها في التمارين)

3. مثال:

نأخذ: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $B=\{-1,2,4,6,44,50\}$

لدينا: $A\cup B=\{-1,1,2,3,4,5,6,10,44,50\}$



4. خاصيات:

A و B و C مجموعات.

-1 $A\cup A=A$ و $A\cup\varnothing=A$.

-2 $A\subset(A\cup B)$ و $B\subset(A\cup B)$.

-3 $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

-4 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cap B\cap C$

5. تمرين تطبيقي:

1. بين أن التقاطع $\cap$ توزيعي على الاتحاد $\cup$ من جهة اليمين: (أي ما يلي) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

جواب:

5) نبين على صحة التوزيعية على اليسار: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (نرمز للعطف ب $\wedge$ و بالفصل ب $\vee$)

نضع: $x\in A\cap(B\cup C)$ هي العلاقة (1)

$$(1)\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ x\in B\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ x\in B\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ x\in B\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in A \ \wedge \ (x\in B \ \vee \ x\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A \ \wedge \ x\in B) \ \vee \ (x\in A \ \wedge \ x\in C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\cap B \ \vee \ x\in A\cap C$$
$$\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

ومنه: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

بنفس الطريقة نبين على صحة التوزيعية على اليمين): $(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A)$.

طريقة 2 : لكي نبين $(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A)$ (نستعمل أن التقاطع و الاتحاد تبادلي) .

نبين أن : $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

لدينا : (لأن التقاطع تبادلي) $(A\cup B)\cap C=C\cap(A\cup B)$

(حسب التوزيعية على اليسار) $=(C\cap A)\cup(C\cap B)$

(لأن العطف تبادلي) $=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

ومنه : التوزيعية على اليسار صحيحة $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

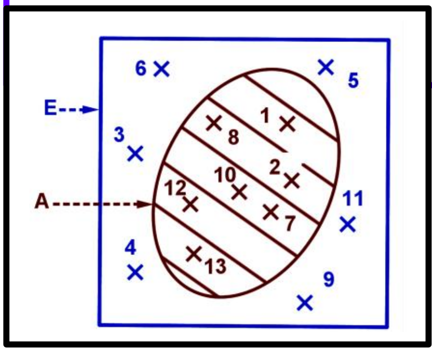
خلاصة : التقاطع $\cap$ توزيعي على الاتحاد $\cup$

C. الجزء المتمم.

1. تعريف:

A جزء من مجموعة E $(A\subset E)$.المجموعة B المكونة من جميع عناصر E التي لا تنتمي ل A تكون جزء من E يسمى الجزء المتمم ل A في E. يرمز له ب $\overline{A}$ $B=\overline{A}$ أو أيضا ب $B=C_E^A$

إذن: $x\in A$ و $x\in E \Leftrightarrow x\in C_E^A$. (نستعملها في التمارين)



2. أمثلة:

- $C_{\mathbb{R}}^{[1,3]}=]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ و $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}=\mathbb{Z}^{-*}$

3. ملحوظة :

$x\in A\Leftrightarrow x\notin\overline{A}$.

4. خاصيات:

E مجموعة.

- $C_E^{C_E^A}=A$ أي $\overline{\overline{A}}=A$ و $C_E^E=\varnothing$ و $C_E^{\varnothing}=E$.
- $A\cup\overline{A}=A\cup C_E^A=E$ و $A\cap\overline{A}=A\cap C_E^A=\varnothing$
- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ و $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

5. برهان:

نبرهن على صحة الخاصية الأخيرة.

- نبرهن أن: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$$\begin{aligned} x\in\overline{A\cup B} &\Leftrightarrow x\in E \wedge x\notin A\cup B\\ &\Leftrightarrow x\in E \wedge (x\notin A \wedge x\notin B)\\ &\Leftrightarrow (x\in E \wedge x\notin A) \wedge (x\in E \wedge x\notin B)\\ &\Leftrightarrow x\in\overline{A} \wedge x\in\overline{B}\\ &\Leftrightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}\end{aligned}$$

شرح : $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$

$x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

خلاصة: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

- نبين على : $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ بطريقة أخرى

$$\begin{aligned} x\in\overline{A\cap B} &\Leftrightarrow x\notin A\cap B\\ &\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\\ &\Leftrightarrow x\in\overline{A}\vee x\in\overline{B}\\ &\Leftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}\end{aligned}$$

شرح : $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$

$x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B$

خلاصة : $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

D. الفرق:

1. تعريف:

A و B مجموعتان.

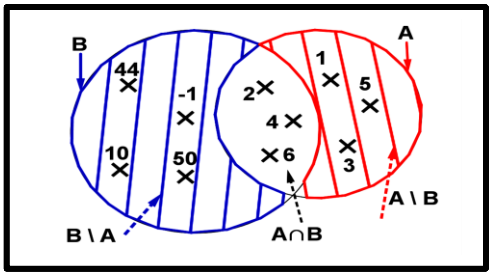
المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B تسمى فرق المجموع A ثم المجموعة B ويرمز لها ب: $A\setminus B$

إذن: $A\setminus B=\{x/(x\in A \text{ و } x\notin B)\}$.

إذن : $x\in A\setminus B\Leftrightarrow x\in A \text{ و } x\notin B$. (نستعملها في التمارين)

2. ملحوظة :

A و B جزآن من مجموعة E لدينا : $A\setminus B=A\cap\overline{B}$



3. أمثلة:

مثال 1:

نأخذ: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $B=\{-1,2,4,6,10,44,50\}$

لدينا: $A\setminus B=\{1,3,5\}$ و $B\setminus A=\{-1,10,44,50\}$

4. تمرين تطبيقي :

حدد: $A\setminus B$ ثم $B\setminus A$ مع.

أ- $A=\mathbb{Z}$ و $B=\mathbb{N}^*$.

ب- $A=\mathbb{R}$ و $B=[1,5[$.

E. الفرق التماثلي:

1. تعريف:

الفرق التماثلي للمجموعتين A و B هو معرف بما يلي: $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. ويرمز له ب: $A\Delta B$.

إذن: $A\Delta B=\{x/(x\in A \text{ و } x\notin B) \text{ أو } (x\in B \text{ و } x\notin A)\}$

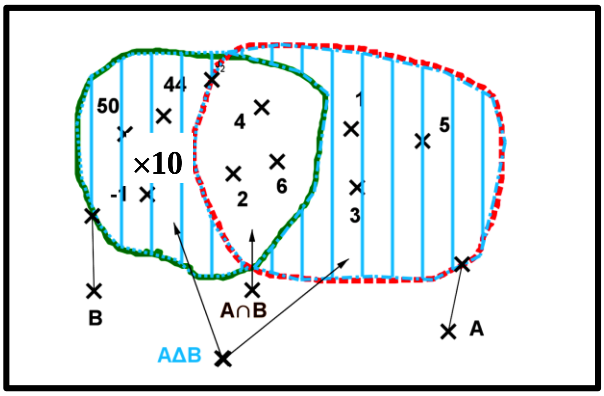
2. ملحوظة :

إذن: $x\in A\Delta B\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)\Leftrightarrow xA\cup B \text{ و } x\notin A\cap B$. (نستعملها في التمارين)

3. مثال:

نعتبر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $B=\{-1,2,4,6,10,44,50\}$.

درس : المجموعات



نحدد : $A\cap B=\{2,4,6\}$ و $A\Delta B=\{-1,1,3,5,10,44,50\}$.

نمثل $A\cap B$ و $A\Delta B$ باستعمال مخطط فان.

4. ملحوظة:

- $A\Delta B=B\Delta A$
- $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
- $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$.

F. الجداء الديكارتي

1. تعريف:

E و F مجموعتان:

المجموعة المكونة من جميع الأزواج (x,y) حيث $x\in E$ و $y\in F$ تسمى الجداء الديكارتي ل E ثم F (الترتيب مهم) ويرمز لها ب ExF .

إذن : $E\times F=\{(x,y)/x\in E \text{ و } y\in F\}$.

2. ملحوظة : $(x,y)\in E\times F\Leftrightarrow x\in E \text{ و } y\in F$ (نستعملها في التمارين)

3. مثال:

نأخذ : $A=\{1,2\}$ و $B=\{2,3,4\}$.

لدينا: $A\times B=\{(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,3);(2,4)\}$

4. ملحوظة:

$E\times\varnothing=\varnothing\times E=\varnothing$

5. تمرين تطبيقي:

1. أكتب بالتفصيل: $E\times F$ مع $E=\{1,2\}$ و $F=\{1,2,3\}$
2. A جزء من المجموعة E . B جزء من المجموعة F.

بين أن: $(A\subset E \;\; B\subset F)\Rightarrow A\times B\subset E\times F$.

6. تعميم

- E_1 و E_2 و E_3 ثلاث مجموعات حيث $x_1\in E_1$ و $x_2\in E_2$ و $x_3\in E_3$ الكتابة (x_1,x_2,x_3) تسمى مثلوث و هو عنصر من الجداء الديكارتي ل E_1 و E_2 و E_3 في هذا الترتيب و يرمز له ب $E_1\times E_2\times E_3$.
- بصفة عامة : نعتبر المجموعات E_i مع $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$ ؛ الجداء الديكارتي ل E_1 و E_2 و E_3 و .... E_n في هذا الترتيب هي المجموعة التي يرمز لها ب : $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ أو أيضا ب $\prod_{j=1}^{j=n}E_j$.

عناصر $\prod_{j=1}^{j=n}E_j$ تكتب على شكل : $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ وتسمى n−uplets . مع $x_1\in E_1$ و $x_2\in E_2$ و .... و $x_n\in E_n$

ومنه : $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ أو أيضا : $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in\prod_{j=1}^{j=n}E_j$.

- حالة خاصة : $E_1=E_2=\cdots=E_n=E$ نكتب : $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ باختصار E^n . مثال : $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$

7. مثال :

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ ولدينا : المثلوث $(2,-5,\sqrt{7})$ عنصر من $\mathbb{R}^3$ و نكتب : $(2,-5,\sqrt{7})\in\mathbb{R}^3$.