

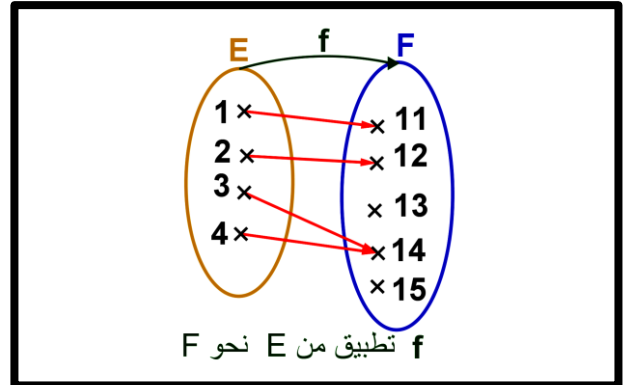
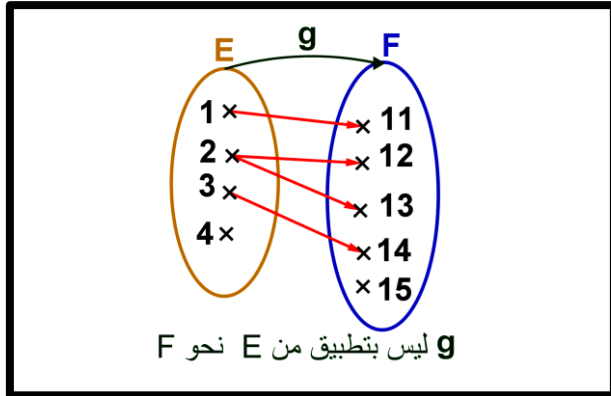


أ. عموميات:

A. تطبيق:

1. نشاط:

نعتبر المجموعتين: $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{11, 12, 13, 14, 15\}$
 نعتبر العلاقة f (أو g) التي تربط عناصر المجموعة E بعناصر المجموعة F كما يلي:
 أ - حالة 1: f تطبيق:

ب - حالة 2: g ليست بتطبيق:

1. ماذا تلاحظ؟

2. مفردات:

- العلاقة f تسمى تطبيق من E إلى F ونرمز له ب: f أو g أو h
- المجموعة E تسمى مجموعة الانطلاق. المجموعة F تسمى مجموعة الوصول.
- عنصر x من E يرمز له ب: x ويسمى سابق. عنصر من F يرمز له ب: y ويسمى صورة.
- التطبيق f يربط x ب y لهذا نكتب: $f(x) = y$.
- نلخص ما سبق ب:

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

3. تعريف:

E و F مجموعتان غير فارغتين.
 كل علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر وحيد y من F تسمى تطبيقا من E إلى F (نحو F).
 و نكتب:

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

4. ملحوظة:

- كل دالة عددية هي تطبيق من مجموعة تعريفها نحو \mathbb{R} .
- كل تطبيق $f : E \rightarrow F$ هو دالة من E نحو F .
- إذا كان $F = E$ نقول أن f تطبيق في E .
- تطبيقين متساويين إذ فقط إذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} E = E' \wedge F = F' \\ \forall x \in E : f(x) = g(x) \end{array} \right\}$$

$$g : E' \rightarrow F' \quad f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = y \quad \text{و} \quad x \mapsto f(x) = y$$
 و نكتب: $f = g$

5. تمرين:

تمرين 1: نعتبر التطبيق التالي.



$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto f(n) = |n|$$

1. حدد صور 0 و -2 و 3. ثم حدد سوابق 1 و 0 و 3.
2. هل الاستلزام: $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$ صحيح؟
- تمرين 2: نعتبر التطبيق التالي.

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto f((n, m)) = n \times m$$

3. حدد صور (1, 0) و (2, -3) و (-6, 1). ثم حدد سوابق 1 و 6 و 0.
4. هل لكل (n, m) و (n', m') من \mathbb{N}^2 الاستلزام صحيح: $m = m'$ و $n = n' \Rightarrow f((n, m)) = f((n', m'))$ ؟
- مثال 3:
- هل التطبيقين التاليين متساويين؟

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2 - 1$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

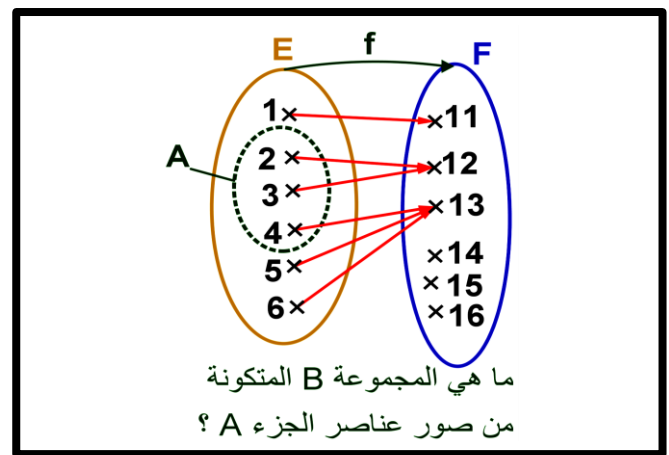
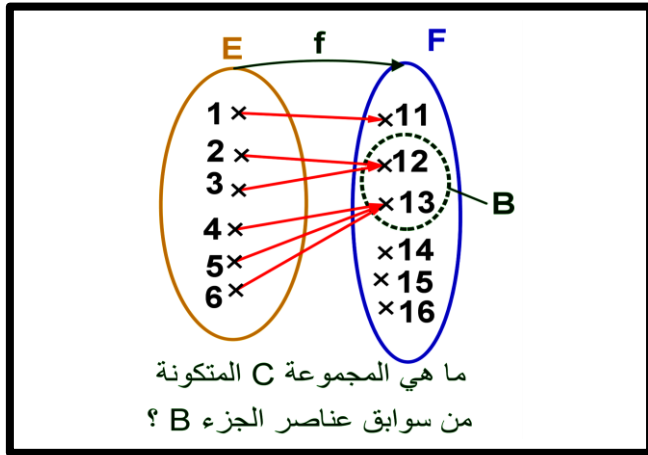
$$x \mapsto f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$$

B. الصورة المباشرة لجزء A من مجموعة الانطلاق:

1. نشاط: نعتبر التطبيق التالي.

1. حدد المجموعة B حيث عناصرها هي صور لعناصر A.

2. حدد المجموعة C حيث عناصرها هي سوابق لعناصر B.



2. مفردات:

- المجموعة: $B = \{12, 13\}$ تسمى الصورة المباشرة للجزء A من مجموعة الانطلاق E و نرسم لها $B = f(A)$.
- و نكتب: $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.
- المجموعة: $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ تسمى الصورة العكسية للجزء B من مجموعة الوصول F و نرسم لها: $C = f^{-1}(B)$.
- و نكتب: $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

3. تعاريف:

تعريف 1:

f تطبيق من E إلى F. A جزء من E (أي $A \subset E$) صور عناصر A تكون مجموعة B (و هي جزء من F) تسمى الصورة المباشرة للجزء A. ويرمز لها: $B = f(A)$ ومنه: $f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset F$

$$\text{إذن: } y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$$



f تطبيق من E إلى F . B جزء من F (أي $B \subset F$).
سوابق عناصر B تكون مجموعة C (وهي جزء من E) تسمى الصورة العكسية للجزء B . ويرمز لها: $C = f^{-1}(B)$
ومنه: $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E$
إذن: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

4. تمارين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيق التالي:

تمرين 2:

نعتبر التطبيق التالي:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$X = (a, b) \mapsto f(X) = f((a, b)) = a$$

$$1. \text{ حدد } f((2, 7)) \text{ و } f((2, 1)).$$

$$2. \text{ أكتب بالإدراك } f^{-1}(\{2\}) \text{ (أي مجموعة سوابق 2)}$$

$$3. \text{ هل الاستلزام التالي صحيح؟}$$

$$f((a, b)) = f((a', b')) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$$

$$\text{و ذلك لكل } (a, b) \text{ و } (a', b') \text{ من } \mathbb{N}^2.$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto f(n) = 2n$$

$$1. \text{ حدد } f(\{0, 1, 2, 5\}) \text{ و } f^{-1}(\{4, 6, 12\}).$$

$$2. \text{ حدد } f(\mathbb{N}) \text{ و } f^{-1}(\{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}) = f^{-1}(2\mathbb{N}).$$

$$3. \text{ هل الاستلزام التالي صحيح؟ } \forall n, n' \in \mathbb{N} : f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$$

5. خاصيات:

A و B جزآن من مجموعة E . C و D جزآن من مجموعة F . f تطبيق من E إلى F .

$$1. A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$2. \text{ أ - } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\text{ب - } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$3. C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$$

$$4. \text{ أ - } f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$\text{ب - } f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

6. برهان:

$$1. \text{ نبين أن : } A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

لدينا: $A \subset B$ ونبين $f(A) \subset f(B)$.

ليكن $y_A \in f(A)$ إذن: يوجد x_A من A حيث: $y_A = f(x_A)$

$$\text{ومنه: (1) } y_A \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_A \in A / y_A = f(x_A)$$

$$\text{إذن: (1) } \Rightarrow \exists x_A \in B / y_A = f(x_A) \text{ (لأن } A \subset B)$$

و بالتالي: $f(x_A) \in f(B)$.

خلاصة: $f(A) \subset f(B)$.

2. نبين أن:



$$أ- f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$• \text{ نبين أن : } f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

ليكن y من $f(A \cup B)$ إذن يوجد $x \in A \cup B$ حيث $y = f(x)$

$$\text{ومنه : } x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ أو } x \in B$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ أو } f(x) \in f(B)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$

$$\text{خلاصة 1 : } f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

$$• \text{ نبين أن : } f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

لدينا : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$ حسب الخاصية 1

$$• B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$$

$$\text{ومنه : } f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

$$\text{خلاصة 2 : } f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

$$\text{خلاصة : } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$ب- f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

ليكن y من $f(A \cap B)$ إذن يوجد $x \in A \cap B$ حيث $y = f(x)$

$$\text{ومنه : } x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ و } x \in B$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ و } f(x) \in f(B)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$

$$\text{خلاصة 1 : } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$3. \text{ نبين أن : } C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$$

ليكن x من $f^{-1}(C)$

$$x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$$

$$\Rightarrow f(x) \in D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$$

$$\text{ومنه : } f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$$

4. نبين أن :

$$أ- f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$• \text{ نبين : } f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \\ A \cap B \subset B \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B) \end{cases} \text{ إذن : } f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$• \text{ نبين : } f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$$

ليكن x من $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ و } x \in f^{-1}(D)$$



$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ و } f(x) \in D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$$

ومنه : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$

خلاصة : $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ب - نبين : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

• نبين : $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

• لدينا : $\begin{cases} A \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B) \end{cases}$ إذن : $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$

• نبين : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

ليكن x من $f^{-1}(C \cup D)$

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ أو } f(x) \in D$$

حالة 1 : $f(x) \in C$

إذن : $x \in f^{-1}(C)$ ونعلم أن : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

حالة 2 : $f(x) \in D$

إذن : $x \in f^{-1}(D)$ ونعلم أن : $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

في كلتا الحالتين : $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

ومنه : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

خلاصة : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ (ملحوظة : يمكن الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

C قصور دالة - تمديد دالة:

1. نشاط:

نعتبر التطبيقين التاليين:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -4x \quad \text{و} \quad x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

1. ما هي العلاقات التي تربط التطبيق g بالتطبيق f ؟

جواب:

العلاقات هي:

▪ $[0, +\infty[\subset \mathbb{R}$

▪ $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) = f(x)$ و

2. مفردات:

التطبيق g يكتفي أو يقتصر على إعطاء صور x من $[0, +\infty[$. ولهذا التطبيق g يسمى قصور التطبيق f على $[0, +\infty[$.

كل تطبيق h يواصل على إعطاء صور x من B حيث $A \subset B$ يسمى تمديدا للتطبيق f على B .



3. تعريف 1: (قصور)

f تطبيق من E نحو F.

كل تطبيق g حيث :

-1 مجموعة انطلاقه هي A حيث $A \subset E$.

$$\forall x \in A : g(x) = f(x) - 2$$

g يسمى قصور للتطبيق f على A.

إذن:

$$g : A (A \subset E) \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

4. تعريف 2: (تمديد)

f تطبيق مجموعة انطلاقه E. كل تطبيق h مجموعة انطلاقه B و يحقق ما يلي :

$$E \subset B - 1$$

$$\forall x \in E, h(x) = f(x) - 2$$

h يسم تمديد للتطبيق f على B.

$$\begin{cases} x \in E, h(x) = f(x) \\ x \in B \setminus E, h(x) = h(x) \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

5. ملحوظة: تمديد ليس بوحيد.

6. تمرين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيقين التاليين:

$$f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x^3$$

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -4x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

1. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على \mathbb{R} حيث؟

2. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على \mathbb{R} حيث؟

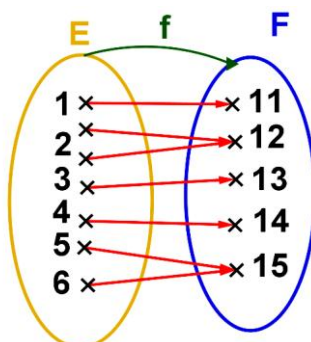
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = -2x^4 + 2x^3 |x+1|$$

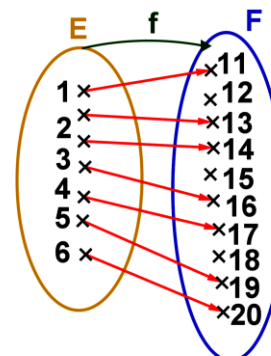
II. التطبيق التبايني - الشمولي - التطبيق التقابلي - التقابل العكسي:

A. التطبيق التبايني:

1. نشاط: نعتبر التطبيقين التاليين.



ماذا تلاحظ بالنسبة لعناصر المجموعة F ؟



ماذا تلاحظ بالنسبة لعناصر المجموعة F ؟

**2. تعريف:**

f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق تبايني (أو تباين) إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقا واحد على الأكثر من E .
 أو أيضا : f تبايني $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

3. تمرين:

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 هل التطبيق f تبايني؟
 نعتبر التطبيق التالي : $(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, 0)$

B. التطبيق الشمولي:**1. تعريف:**

f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق شمولي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقا واحدا على الأقل من E .
 أو أيضا : f شمولي $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x))$

2. ملحوظة:

- كي نبرهن على أن f شمولي نبين أن المعادلة $x \in E : f(x) = y$ لها على الأقل حل في E مهما يكن y من F (المجهول هو x أما y من F).
- $f(E) = F \Leftrightarrow f$ شمولي

3. تمارين:**تمرين 1:**

نعتبر التطبيق التالي :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3|x|$$

1. هل التطبيق f شمولي؟

2. هل g قصور التطبيق f على $[0, +\infty[$ شمولي؟

حيث:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = 3x|x+1| - 3x^2$$

C. التطبيق التبادلي - التطبيق العكسي:**1. تعريف:**

- f تطبيق من E نحو F .
- f يسمى تطبيق تبادلي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقا وحيدا x من E .
 - f تبادلي $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x))$
 - التطبيق g من F إلى E الذي يربط كل عنصر y من F بالعنصر الوحيد x من E حيث $f(x) = y$ يسمى التطبيق العكسي لـ f ؛ ويرمز له بـ : $g = f^{-1}$.



2. ملحوظة:

- التطبيق العكسي f^{-1} يكتب على الشكل التالي :
 $f^{-1} : F \rightarrow E$ أو أيضا : $f^{-1} : F \rightarrow E$
 $x \mapsto f^{-1}(x)$ و $y \mapsto f^{-1}(y) = x$
 وذلك باستعمال المتغير x بدل من y
- العلاقة التي تربط f و f^{-1} هي :

$$\left. \begin{array}{l} x = f(x) \\ x \in E \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{array} \right.$$
- لكي نبرهن على أن f تقابلي نبين أن المعادلة $x \in E : f(x) = y$ لها على حل وحيد مهما يكن y من F .

3. تمارين:

تمارين 1:

نعتبر التطبيق التالي :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x - 2$$

1. هل التطبيق f تقابلي؟2. حدد تقابله العكسي f^{-1} .

III. مركب التطبيقات:

1. تعريف:

f و g تطبيقان حيث : $f : E \rightarrow F$ و $g : F \rightarrow G$

التطبيق $h : E \rightarrow G$ المعروف بـ : $h(x) = g(f(x))$ لكل x من E و يسمى مركب التطبيقين f و g في هذا الترتيب.

يرمز له بـ : $g \circ f$. إذن :

$$h = g \circ f : E \rightarrow G$$

$$x \mapsto h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

2. ملحوظة:

- مركب تطبيقان ليس بتبادلي دائما.
- مركب التطبيقات هو تجمعي: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$
- f تقابل و تقابله العكسي هو f^{-1} لدينا:

$$f \circ f^{-1} = Id_F \text{ أي } \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x \text{ -1}$$

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ أي } \forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x \text{ -2}$$

توضيح للملاحظة الأخيرة:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x \mapsto & f(x) = y & \mapsto & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f^{-1} \circ f}$

لدينا:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ y \mapsto & f^{-1}(y) = x & \mapsto & f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ f^{-1}}$

$$\text{إذن: } \forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x \text{ أي } f^{-1} \circ f = Id_E$$

$$\text{إذن: } \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x \text{ أي } f \circ f^{-1} = Id_F$$



3. تمارين :

■ تمرين 1:

حدد : $g \circ f$ ثم $f \circ g$ حيث : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $f(x) = 4x^3 - 2x$ و $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

■ تمرين 2:

$$f : [\sqrt{2}, +\infty[\rightarrow [\sqrt{2}, +\infty[$$

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $x \mapsto f(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$

1. بين أن f تقابل في $[\sqrt{2}, +\infty[$.

2. أحسب: f^2 ثم استنتج الدالة العكسية f^{-1} .