Lycée moussa bno Noussaer-Khémisset	Devoir surveillé n°2 1er tranche : 2016/2017	1er Bac sc mat int Prof:Abdellah Belkhatir Durée : 2 heures

Exercice n°1: (2pts)

On considère les ensembles : $E = \{2k-1 \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$

$$F = \left\{\frac{2k-1}{5} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } G = \left\{\frac{4-\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} \;/\; x \in [0,+\infty[\right\}.$$

0,25 1)- a)- Montrer que : $8 \notin F$.

0,75 b)- Montrer que : $E \subset F$ et que : $F \not\subset E$.

1 2)- Montrer que: $G =]-1,1]$.

Exercice n°2: (4pts)

0,75 1)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(i) : -x^2 + x + 2 \geq 0$.

On considère l'application : $f : \begin{cases} [-1,2] \to [0,+\infty[\\ x \mapsto \sqrt{-x^2+x+2} \end{cases}$.

0,5 2)- a)- Montrer que: $(\forall x \in [-1,2]),\ f(1-x) = f(x)$.

0,25 b)- L'application f est-elle injective ? justifier votre réponse .

0,5 3)- a)- Montrer que: $f([-1,2]) \subset \left[0,\frac{3}{2}\right]$.

0,25 b)- L'application f est-elle surjective ? justifier votre réponse .

0,75 4)- Déterminer $f^{-1}([1,2])$.

5)- Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

1 ✓ Montrer que g est bijective de $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ vers $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.

Exercice n°3: (4pts)

Soient f et g les fonctions numériques définies par :

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x} + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{\frac{x}{x^3+x-2}}.$$

0,75 1)- a)- Montrer que f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et $[-1,0[$.

0,75 b)- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

1 2)- a)- Montrer que : $D_g =]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$.

0,5 b)- Montrer que : $(\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[),\ \left(\frac{1}{g(x)}\right)^2 = f(x)$.

1 c)- En déduire la monotonie de g sur $]-\infty,-1]$, $[-1,0[$ et $]1,+\infty[$.

- ## Exercice n°4: (10pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x + 1}$

0,5 1)- a)- Montrer que : $D_f = \mathbb{R}$.

2 b)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), \dfrac{-2}{3} \leq f(x) \leq 2$.

2 c)- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$. Et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

d)- Dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes :

2 $$F(x) = \left|f\left(-|x|\right)\right| \text{ et } G(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

2)- Soient g et h les fonctions définies par :

$$g(x) = \frac{1}{2 - x} \text{ et } h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2.(x-1)^2}.$$

1 a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}), h(x) = g \circ f(x)$.

1,5 b)- En déduire la monotonie de h sur les intervalles suivants : $]-\infty, -1]$ et $[-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

1 c)- Dresser le tableau de variations de h puis en déduire ses Extremums .

➢ Exercices bonus:

- ## Exercice n°1: (3pts)

✓ Déterminer toutes les fonctions f définies sur $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Et vérifiants : $(\forall x \in D), f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right) = x$.

- ## Exercice n°2: (2pts)

Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application

Telle Que : $(\forall x \in E), f \circ f \circ f(x) = f(x)$.

✓ Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective .

- ## Exercice n°3: (3pts)

On pose $D =]-1, +\infty[$ et soit $f : D \to D$ une fonction vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in D^2), f\left(x + f(y) + x.f(y)\right) = y + f(x) + y.f(x)$$

Et la fonction : $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur chacun Des intervalles $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

✓ Montrer que : $(\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[), f(x) \neq x$ et en déduire

Que $f(0) = 0$ et que: $(\forall x \in D), f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$.