

Exercice1 (8points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{u_n^2}{4}}$.

- 1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
 2. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq u_n \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 3. montrer que la suite (u_n) est croissante.
 4. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = u_n^2 - \frac{4}{3}$.
 - a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
 - b. Exprimer V_n puis u_n en fonction de n .
 - c. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$ en fonction de n .
 5. Soit (T_n) la suite définie par $T_0 = 1$ et $T_{n+1} = \frac{1}{4}T_n + V_n$. On pose $H_n = 4^n T_n$.
 - a. Montrer que (H_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{-16}{3}$.
 - b. Exprimer H_n puis T_n en fonction de n .

Exercice (7points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ dont la courbe ainsi que la droite d'équation $y=x$ est donnée en annexe et à rendre avec la copie.

- 1
0.5
1
1.5
1.5
1.5
1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
 - a. Placer les trois premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
 - b. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la monotonie de la suite (u_n) ?
 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n$.
 3. Montrer par le calcul que $\forall x \geq 1, on a f(x) \leq x$. Et on déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n - 1 \leq 3(\frac{1}{2})^n$.
 5. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n u_k, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Montrer que $n < S_n \leq n + 3(1 - (\frac{1}{2})^n)$

Exercice3 (classique)(5points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}, n \in \mathbb{N}$.

- 1
1
1
1
1
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n$.
 2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire que (u_n) est bornée.
 3. On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ en déduire $\sum_{k=0}^{n-1} (\frac{3}{u_k+2})$.

Bonus.

Soit x un réel montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ est croissante.

Et la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$ est décroissante.

