الأستاذ : **M.SENNOUR**

تمارين المنطق
أولى باكلوريا علوم رياضية

سلسلة 1

تمرين 1 :

أكتب بإستعمال المكممات العبارات التالية و أدرس قيمة حقيقتها :

(P) : لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث : $n=2m$

(Q) : لكل عددين حقيقيين x و y يوجد عدد صحيح طبيعي n حيث : $x+y=n$

(R) : يوجد عدد حقيقي M بحيث لكل x من $\mathbb{R}$: $x\leq M$

(S) : لكل عدد حقيقي m يوجد عدد حقيقي x بحيث : $x^2-mx+1=0$

تمرين 2 :

إعط نفي العبارات التالية :

(P) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\exists m\in\mathbb{N})\quad n\prec m$

(Q) : $(\forall\alpha\succ 0)\ (\exists x\in[0,1[)\ (\exists y\in]0,1[)\ \ x^2+y^2\prec\alpha$

(R) : $(\forall x\in[1,2])\ (\exists y\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}])\ : xy-x+2y-1=0$

(S) : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^+\quad x\prec y\Rightarrow\ \sqrt{x}\prec\sqrt{y}$

(T) : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad 1\prec x\leq 2\ \Rightarrow\ 1\prec x^2\leq 4$

تمرين 3 :

I. لتكن العبارة :

(P) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ (\forall m\in\mathbb{N}^*)\ n\neq m\ \Rightarrow\ n^m\neq m^n$

1) حدد نفي العبارة (P).

2) أحسب 2^4 و 4^2 ثم إستنتج قيمة العبارة (P).

II. لتكن العبارة :

(Q) : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ (\exists y\in\mathbb{R})$ ، $x^2-xy+y^2-4=0$

إعط نفي العبارة (Q) و بين أنها خاطئة

III. لتكن العبارة : (R) : $\forall x\in\mathbb{Q}$ ، $x^2-2\neq 0$

ما هي صحة العبارة (R)

تمرين 4 :الإستلزام المضاد للعكس

(1) — a و b عددان حقيقيان , بين أن :

$(a\neq 1)$ و $(b\neq 1)\ \Rightarrow\ a+b-ab-1\neq 0$

(2) — بين أن :

$(\forall x\in\mathbb{R})\ \ (x\neq-\sqrt{3})$ و $(x\neq\sqrt{3})\Rightarrow\ \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\neq 1$

(3) — بين أن :

$a+b\succ c\ \Rightarrow\ a\succ\frac{1}{2}c$ أو $b\succ\frac{1}{2}c$

(4) — بين أن :

$(\forall x\succ 1)\ (\forall y\succ 1)\ x\neq y\ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x^2}\neq\frac{y}{1+y^2}$

(5) — بين أن :

$(xy\neq 1)$ و $(x\neq y)\ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x+x^2}\neq\frac{y}{1+y+y^2}$

تمرين 5 : الإستدلال بالترجع

بين أن :

(1) : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 1\times 2+2\times 3+..+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) : $2^n\geq n^2\quad(\forall n\geq 4)$

(3) : $3^{2n+1}+2^{n+2}$ قابل للقسمة على $7\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

(4) : $3^{2n}+2^{6n-5}$ مضاعف ل $11\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

(5) : 4^n+6n-1 مضاعف ل $9\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

(6) : $n^2(n^2-1)$ مضاعف ل $12\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

(7) : $7^n\geq 3^n+4^n+5^n\quad(\forall n\geq 3)$

تمرين 6 : الإستدلال بالترجع

بإستعمال البرهان بالترجع بين المجاميع التالية :

(1) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+...+\frac{9}{10^n}=1-\frac{1}{10^n}$

(2) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$

(3) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (q\neq 1)\ 1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(4) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 1+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$

(5) :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

تمرين 7 : الإستدلال بالخلف

(1) : لدينا : $a^3+3a^2-2>0$ و $a\in\mathbb{R}^+$ ، بين أن : $a\succ\sqrt{3}+1$

(2) : ليكن $a\in\mathbb{R}^+$ بحيث : $a^7+8a^3+18a^2+8a-2\succ 0$

بين أن : $\sqrt{3+\sqrt{3}}-2\prec a$

(3) : بين أن : $\forall\varepsilon\succ 0\ \ |a-b|\leq\varepsilon\Rightarrow a=b$

(4) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ \sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin\mathbb{Q}$

(5) : بين أن :

(a) n^2 زوجي $\Leftrightarrow$ n زوجي $\forall n\in\mathbb{Z}$

(b) استنتج أن $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$ ثم أن $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{Q}$