تمارين في المنطق الرياضي

الأولى علوم رياضية

تمرين01:

1)- أ)- هل التكافؤ التالي صحيح أم خاطئ؟

لكل (n,m) من $\mathbb{N}^2$ لدينا: $(m \in 2.\mathbb{N})$ أو $(n \in 2.\mathbb{N}) \Leftrightarrow n \times m \in 2.\mathbb{N}$.

علل جوابك ،

ب)- أكتب نفي العبارة التالية: $p"\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x \times y = 1"$

و إستنتج قيمة حقيقتها .

2)- لتكن x و y و z ثلاثة أعداد حقيقية من بينها 0 و عددين غير منعدمين إشارتهما مختلفة و تحقق الإستلزامات التالية:

$$(1) x = 0 \Rightarrow y \succ 0; (2) x \succ 0 \Rightarrow y \prec 0; (3) y \neq 0 \Rightarrow z \succ 0$$

قارن x و y و z .

3)- بين أن العدد $1 + 2 \times 3^{n-1} + 5^n$ يقبل القسمة على 8 لكل n من $\mathbb{N}^*$.

4)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = 1 - 3 + 5 - 7 + ... + (-1)^n (2.n + 1)$

أ)- أحسب S_1 و S_2 و S_3 .

ب)- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = (-1)^n \times (2.n + 1)$.

5)- بين بالترجع أنه، لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 24$ يوجد (p,q) من $\mathbb{N}^2$ بحيث:

$n = 5.p + 7.q$.

تمرين02:

1)- أكتب نفي كل عبارة من العبارتين:

$p"\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} / x \times y = 1"$ و $q"\forall a \in \mathbb{R} : a.x = a.y \Rightarrow x = y"$

و إستنتج قيمة حقيقتهما، معللا جوابك .

2)- بين مستدلا بمضاد العكس أن: $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + 2.x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \prec x \prec \frac{1}{2}$.

3)- أ)- بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ يوجد (p_n, q_n) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث:

$(2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n.\sqrt{3}$ و $3.q_n{}^2 = p_n{}^2 - 1$.

الأستاذ : عبدالله بن لختير
ثانوية الفتح
نيابة الخميسات

ب)- إستنتج أن $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$ عدد فردي ، لكل n من $\mathbb{N}^*$.

تمرين03:

1)- بين أن: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x \prec y : \left(\mathbb{Z}\cap[x,y]=\varnothing \Rightarrow |x-y|\prec 1\right)$.

2)- لكل n من $\mathbb{N}^*$، نضع $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(n-k)^2$.

أ)- أحسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 .

ب)- بين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^* : S_n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

تمرين04:

1)- نعتبر المجموعة $A=\{1,2,3,.....,n\}$ حيث n عدد فردي، و لتكن x_1 و x_2 و . . . وx_n

عناصر من A مختلفة مثنى مثنى .

بين أنه يوجد k من A بحيث: x_k-k عدد زوجي .

(يمكنك الإستدلال بالخلف)

2)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n=1-3+5-7+......+(-1)^n\times(2.n+1)$ ،

أ)- أحسب S_1 و S_2 و S_3 .

ب)- بين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^* : S_n=(-1)^n.(n+1)$.

3)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $T_n=2-4+6-8+......+(-1)^{n-1}\times(2.n)$ ،

أ)- أحسب T_1 و T_2 و T_3 .

ب)- بين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^* : T_n=\dfrac{1-(-1)^n\times(2.n+1)}{2}$.

تمرين05:

1)- ليكن a عدد حقيقيا بحيث $a\neq 1$، بين بالترجع أن:

$1+a+a^2+......+a^{n-1}=\dfrac{1-a^n}{(1-a)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2)- إستنتج أن: $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\prec 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

الأستاذ : عبدالله بن لختير
ثانوية الفتح
نيابة الخميسات

لدينا :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec 1 \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n+\frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec \left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$$

و $\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)=\left(1-1+\frac{1}{n^2}\right)\times\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k=\frac{1}{n^2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$

و بما أن : $n\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$

فإن : $\frac{n}{n^2}\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec \frac{1}{n^2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$

أي أن : $\frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec \frac{1}{n^2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$

إذن : $\frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \prec \left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$

و بالتالي فإن : $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\prec 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

الأستاذ : عبدالله بن لختير
ثانوية الفتح
نيابة الخميسات