تمارين درس المجموعات

التمرين رقم1 :

1) أكتب بتفصيل المجموعات التالية:

$A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / (x+y)(x+2y)=1\}$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / 9\le x^2+y^2\le 16\}$

$C=\{x\in\mathbb{Q} / (x^2-3)(|x|-1)=0\}$

2) أكتب بإدراك المجموعات التالية:

$A=\left\{...,\frac{1}{9},\frac{1}{3},1,3,9.....\right\}$ $B=\left\{1,\frac{-1}{2},\frac{1}{4},\frac{-1}{8},\frac{1}{16},...\right\}$

$C=\{...,-8,-3,2,7,12.....\}$

التمرين رقم2 :

نضع $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{3,4,5,6\}$

1) حدد بتفصيل المجموعتين:
$E=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ و $F=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

2) قارن بين المجموعتين E و F ثم حدد بتفصيل المجموعة $G=E\cup(A\cap B)$

3) حدد بتفصيل المجموعة X التي تحقق:
$(A\setminus X)\cup(X\setminus A)=B$

التمرين رقم3 :

1) حدد المجموعة: $[-3\pi,2\pi]\cap\left\{\frac{-\pi}{2}-\frac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) نعتبر المجموعتين:
$A=\{(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\left\{\frac{-\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$

بين أن: $A\subset B$

3) نعتبر المجموعتين:
$C=\left\{\frac{-\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$ و $D=\left\{\frac{-\pi}{3}+k\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$

بين أن: $C\cap D=\varnothing$

التمرين رقم4 :

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا.

نعتبر المجموعتين: $E=\{x\in\mathbb{R} / |x+1|<\alpha\}$ و $F=\left\{x\in\mathbb{R} / |x-1|<\frac{3}{2}\right\}$

1) بين أن: $E\neq\varnothing$

2) حدد قيم α إذا وجدت والتي من أجلها يكون E = F

3) حدد قيم α إذا وجدت، بحيث تكون $E\cap F=\varnothing$.

التمرين رقم5 :

ليكن A و B جزئين من المجموعة E حيث $A\subset B$

1) حل في P(E) المعادلة: $X\cap B=X\cup A$

2) حل في P(E) المعادلة: $X\setminus A=A\setminus X$

التمرين رقم6 :

A و B و C أجزاء من مجموعة E . بين المتساويات التالية:

1) $B\setminus A=(B\cup A)\setminus A$

2) $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$

3) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$

4) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$

التمرين رقم7 :

لتكن E مجموعة. نضع لكل عنصرين A و B من $P(E)$

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

1) بين أن: $A\Delta B=B\Delta A$

2) بين أن: $\forall C\in P(E)\quad A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

3) بين أن: $\forall C\in P(E): A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

التمرين رقم8 :

لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E .

1) بين أن: $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B\cap\overline{A}=C\cap\overline{A}$

2) بين أن: $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

3) بين أن: $A\cap C\neq\varnothing$ و $B\cap C=\varnothing\Rightarrow A\cap\overline{B}\neq\varnothing$

التمرين رقم9 :

1) ليكن A و B و C أجزاء من مجموعة E:

a) بين أن: $A\subset B\Rightarrow C\cap A\subset C\cap B$ و $C\cup A\subset C\cup B$

b) بين أن: $(A\cup B=A\cup C$ و $A\cap B=A\cap C)\Rightarrow B=C$

2) ليكن A و B و C و D أجزاء من مجموعة E:

بين أن: $\left.\begin{array}{l}(B\setminus D)\subset A\\(D\setminus C)\subset A\end{array}\right\}\Rightarrow (B\setminus C)\subset A$

التمرين رقم10 :

A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة غير فارغة E.

1) بين أن: $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

2) بين أن: $C_{E\times E}^{A\times B}=\left(C_E^A\times E\right)\cup\left(E\times C_E^B\right)$

3) بين أن: $A\times B\subset A\times C\Leftrightarrow B\subset C$

التمرين رقم11 :

1) لتكن A و B و C ثلاث مجموعات من $P(E)$ بحيث: $B\subset A\subset C$

حل في $P(E)$ النظمة: $\begin{cases}A\cap X=B\\A\cup X=C\end{cases}$

2) لتكن A و B و C ثلاث مجموعات من $P(E)$ بحيث: $B\subset A$ و $A\cap C=\varnothing$

حل في $P(E)$ النظمة : $\begin{cases}A\setminus X=B\\X\setminus A=C\end{cases}$

تمارين درس التطبيقات

التمرين رقم1 :

نعتبر التطبيق: $f:[0,+\infty[\to]-\infty,1[$

$$x\to\frac{x-2}{x}$$

1) حدد $f\left(]0,1[\cup[3,4]\right)$

2) حدد $f^{-1}\left([0,1[\right)$ ثم $f^{-1}\left(]-3,-2]\cup[0,1[\right)$

التمرين رقم2 :

نعتبر التطبيق: $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$

$$x\to\frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

1) بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+),\quad 0\le f(x)\le\frac{1}{2}$

2) بين أن: $\left(\forall y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\left(\exists x\in\mathbb{R}^+\right)/\ y=f(x)$

استنتج أن: $f(\mathbb{R}^+)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

التمرين رقم3 :

1) نعتبر التطبيق: $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$x\to1+\frac{1}{x^2}$$

a) أ- حدد $f^{-1}\left(\{2\}\right)$

ب- استنتج أن التطبيق f ليس تباينيا.

b) أ- حل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة $f(x)=0$

ب- استنتج أن التطبيق f ليس شموليا.

2) نعتبر التطبيق: $g:]-\infty,0[\to]1+\infty[$

$$x\to1+\frac{1}{x^2}$$

a) بين أن التطبيق g تقابل من $]-\infty,0[$ نحو $]1,+\infty[$

b) حدد التقابل العكسي للتطبيق g.

التمرين رقم4 :

نعتبر التطبيق: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\to\sqrt{x^2-x+1}$$

1) بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}: f(1-x)=f(x)$ ، ثم أدرس تباينية التطبيق f .

2) بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ثم أدرس شمولية التطبيق f .

3) ليكن g و h قصورا f على المجالين: $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و $J=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ على التوالي.

بين أن g تقابل من المجال I نحو المجال $K=\left]\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$ ، ثم حدد تقابله العكسي g^{-1} .

4) نعتبر التطبيق: $k:J\to I$

$$x\to1-x$$

a) بين أن $h=gok$

b) إستنتج أن h تقابل وحدد تقابله العكسي h^{-1}.

التمرين رقم5 :

نعتبر التطبيق: $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\to x-1-2\sqrt{x-1}$$

1) أ- حدد $f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$

ب- هل التطبيق f تبايني؟

2) أ- بين أن: $f\left([1,+\infty[\right)=[0,+\infty[$

ب- هل التطبيق f شمولي على $\mathbb{R}$ ؟

3) نعتبر التطبيق $g:[0,+\infty[\to]-1,+\infty[$

$$x\to x^2-2x$$

أ - حدد تطبيق h حيث: $f=goh$

ب- بين أن g و h شموليين واستنتج أن التطبيق f شمولي.

التمرين رقم6 :

a و b عددان حقيقيان حيث: $a<b$

نعتبر التطبيق: $f:[0,1]\to[a,b]$

$$x\to ax+(1-x)b$$

1) بين أن التطبيق f تبايني.

2) أ- ليكن $y\in[a,b]$. بين أن: $\frac{b-y}{b-a}\in[0,1]$

ب- استنتج أن التطبيق f شمولي

3) استنتج أن التطبيق f تقابل من $[0,1]$ نحو $[a,b]$ ثم حدد تقابله العكسي.

التمرين رقم7 :

ليكن $a\in]-1,1[$ φ_a التطبيق المعرف بما يلي :

$$\varphi_a:]-1,1[\to]-1,1[$$

$$x\mapsto\frac{x+a}{1+ax}$$

1) حدد $\varphi_{-a}o\varphi_a$.

2) بين أن φ_a تقابل وحدد تقابله العكسي.

التمرين رقم8 :

ليكن f تطبيقا معرفا من E نحو F و $A \subset E$ و $B \subset F$

1 a)) بين أن $A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) بين أن:

$$f \text{ تبايني } \Leftrightarrow (\forall A \in P(E)) : A = f^{-1}(f(A))$$

2 a)) بين أن $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) بين أن:

$$f \text{ شمولي } \Leftrightarrow (\forall B \in P(E)) : f(f^{-1}(B)) = B$$

التمرين رقم9 :

ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F .

A_1 و A_2 جزئين من E.

1) بين أنه إذا كان $A_1 \subset A_2$ فإن $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) بين أن $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3) a) بين أن $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

b) بين أنه إذا كان f **تباينيا** فإن:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

التمرين رقم10 :

ليكن f تطبيقا من E نحو F .

B_1 و B_2 جزئين من F

1) بين أن $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

2) بين أن $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

التمرين رقم11 :

ليكن A جزء من مجموعة E .

نعتبر التطبيق φ_A المعرف بما يلي :

$$\varphi_A : E \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 \ ; \ x \in A \\ 0 \ ; \ x \notin A \end{cases}$$

1) ما هو الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق φ_A شموليا ؟

2) بين أن $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$.

3) بين أن التطبيق $\begin{array}{l} \varphi : P(E) \to A(E,\{0,1\}) \\ A \mapsto \varphi_A \end{array}$ تقابل .

التمرين رقم21 :

ليكن A جزءا غير فارغ من مجموعة E نضع:

$$P_+(A) = \{B \in P(E) / A \subseteq B\}$$

$$P_-(A) = \{B \in P(E) / B \subseteq A\}$$

ونعتبر التطبيق f المعرف بما يلي:

$$f : P(E) \to P_-(A) \times P_+(A)$$
$$x \to (A \cap X, A \cup X)$$

بين أن f تقابل وحدد تقابله العكسي.

التمرين رقم13 :

ليكن f و g تطبيقان معرفان من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ بما يلي:

$$f(n) = 2n \quad \text{و} \quad \begin{cases} g(n) = \dfrac{n}{2} \ ; \ n = 2p \\ g(n) = \dfrac{n+1}{2} \ ; \ n = 2p+1 \end{cases}$$

1) أدرس تباينية وشمولية وتقابلية كل من f و g .

2) حدد التطبيقين fog و gof .

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $(gof)(x) = (fog)(x)$.

التمرين رقم14 :

ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو E بحيث : $fofof = f$

1) a- بين أن: $(\forall x \in E : (fof)(x) = x) \Rightarrow f$ تبايني

b – إستنتج أن : f تقابل $\Leftrightarrow$ f تبايني

2) a- بين أن: $(\forall x \in E : (fof)(x) = x) \Rightarrow f$ شمولي

b – إستنتج أن : f تقابل $\Leftrightarrow$ f شمولي

3) إستنتج أن : f تبايني $\Leftrightarrow$ f شمولي

التمرين رقم15 :

نعتبر التطبيق f المعرف ب: $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{array}$ حيث :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\underbrace{fofof.....of}_{2009 \text{ fois}})(x) = x^2 - 3x + 4$$

نضع : $(\underbrace{fofof.....of}_{2008 \text{ fois}})(2) = y$

1) بين أن : $f(y) = 2$.

2) إستنتج أن : $(\underbrace{fofof.....of}_{2008 \text{ fois}})(2) = 2$

التمرين رقم15 :

ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + f(x) = \dfrac{1}{x} - x + 1$

نعتبر التطبيق g المعرف ب: $\begin{array}{l} g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \to \dfrac{x+1}{x} \end{array}$

1) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$. أحسب $gog(x)$ و $gogog(x)$.

2) ليكن x من $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$: بين أن :

$$f(x) + f(gog(x)) = \frac{1}{gog(x)} - gog(x) + 1$$

3)استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\} : f(x) = 1 - x$

التمرين رقم16 :

حدد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق:

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(xy) = f(x).f(y) - x - y$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) + 2f(1-x) = 3x - 2$