Lycée moussa bno Noussaer-Khémisset	**Devoir surveillé N°3** 1er Tranche 2016-2017	1er Bac Sc Mat Int Prof : A.Belkhatir Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (3,5pts)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2a \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 2a - \frac{a^2}{u_n} .$$

1 1)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > a$.

2)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - a}$.

1 a)- Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{a}$.

1,5 b)- Exprimer v_n puis u_n en fonction de a et n.

Exercice n°2 : (9,5pts)

Soient a et b deux nombres réels telle que : $0 < a < b$.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a + b \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n} .$$

1 1)- a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > b$.

1,5 b)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - a)(b - u_n)}{u_n}$ et en déduire La monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0,5 c)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq a + b$.

2)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$.

1 a)- Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{a}{b}$.

1,5 b)- Exprimer v_n puis u_n en fonction de a et b et n .

3)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - b}$.

1 a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = \dfrac{1}{b-a} . \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{v_k} - 1 \right)$.

1 b)- En déduire l'expression de S_n en fonction de a et b et n .

4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1) v_k$.

2 ✓ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), X_n = \dfrac{b}{a-b} . \left[(n+1) v_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \right]$, puis en Déduire l'expression de X_n en fonction de a et b et n .

- **Exercice n°3: (07pts)**

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*), S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} .$$

1)- Montrer que :

1,5 $$(\forall k\in\mathbb{N}^*), \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right] .$$

2 2)- En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), S_n=\dfrac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$.

1,5 3)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), \dfrac{1}{6}\leq S_n<\dfrac{1}{4}$.

2 4)- Exprimer en fonction de n $(n\in\mathbb{N}^*)$ la somme : $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$.

- **Exercices bonus :**

- **Exercice n°1:**

2 ✓ Calculer en fonction de n la somme : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+2^{2^k}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

- **Exercice n°2:**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0=5 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n} .$$

2 ✓ Montrer que : $u_{1000}>45$.

- **Exercice n°3:**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique à termes strictement positif de Raison $r=1$. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), S_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n+2}}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2n}}$.

3 ✓ Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et bornée .

- **Exercice n°4:**

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(0)=0 \text{ et } (\forall x\in\mathbb{R}), 3.f(x)-2.f(f(x))=x .$$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=0 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=f(u_n)$$

2 ✓ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}), v_n=u_{n+1}-u_n$ est géométrique et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.