

## تمرين 8 :

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ ، و  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  من  $\mathbb{R}$   
بحيث:  $|a_i| \leq 1$  و  $|b_i| \leq 1$  و  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$   
بين بالترجع أن:

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

## تمرين 9 :

بين أن:  $\exists (a, b) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}) : a^b \in \mathbb{Q}$

## تمرين 10 :

بين أن:  $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}^* : ax + by = 1 \implies \frac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$

## تمرين 11 :

لكل عنصر  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نضع:

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)(n+2)\dots(2n) \\ T_n &= [1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)] \times 2^n \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= T_n \quad : \text{أثبت أن} \end{aligned}$$

## تمرين 12 :

ليكن  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $\mathbb{R}_+^*$  بحيث:  
 $xyz > 1$  و  $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$   
بالتعمال البرهان بالخلف بين أن:

- (1) - كل من الأعداد  $x$  و  $y$  و  $z$  يخالف 1.
- (2) - أحد الأعداد  $x$  و  $y$  و  $z$  أصغر قطعاً من 1.

## تمرين 13 :

تكن  $f$  دالة معرفة من  $[0, 1]$  نحو  $\mathbb{R}$  بحيث:  
 $f(1) = 0$  و  $f(0) = 0$   
و  $\forall x, y \in [0, 1] \quad f(x) = f(y) = 0 \implies f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$   
بين بالترجع أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  و لكل  $h$  من  $\mathbb{N}$  بحيث:  $0 \leq h \leq 2^n$   
لدينا:  $f\left(\frac{h}{2^n}\right) = 0$   
(ناقش حسب زوجية العدد  $h$ )

## تمرين 1 :

بين أن:  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$   
استنتج أن:  
 $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$

## تمرين 2 :

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{Q}^+$ ، بحيث:  $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$  و  $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$   
بين أن:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$

## تمرين 3 :

بين أن:  
 $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a+b+c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

## تمرين 4 :

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ ، و  $a_1, a_2, \dots, a_n$  من  $[1, +\infty[$   
بين أن:  $\prod_{i=1}^n (1+a_i) \leq 2^{n-1} \left(1 + \prod_{i=1}^n a_i\right)$

## تمرين 5 :

بين أن:  
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$

## تمرين 6 :

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ ، بحيث:  $n$  ليس بمربع عدد صحيح طبيعي.  
بين أن:  $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$   
استنتج أن:  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

## تمرين 7 :

حدد العددين  $x$  و  $y$  بحيث:  
 $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2}$