

تمارين المنطق أولى باك لوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

/2 (a) بين بالترجع أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(nx) = nf(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = nf(x) \quad : \text{بين أن (b)}$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = rf(x) \quad : \text{بين أن (c)}$$

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = ax \quad : \text{استنتج أن /3}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \quad : \text{بين أن /1}$$

$$a + b = 2 \quad : \text{ليكن } a \text{ و } b \text{ عددين حقيقيين بحيث : /2}$$

$$a^4 + b^4 \geq 2 \quad : \text{بين أن : /2}$$

تمرين 2 :

/1 بين بالترجع أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 \quad (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$$

$$(2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n \sqrt{3} \quad \text{و}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N} \quad : \text{استنتج أن : /2}$$

($2\mathbb{N}$: هي مجموعة الأعداد الزوجية)

تمرين 6 :

ليكن $\alpha > 1$ حلا للمعادلة $x + \frac{1}{x} = 3$ بحيث :

بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = 3\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{N} \quad : \text{استنتج أن : /3}$$

تمرين 3 :

بين بالترجع أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad /1$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1) \quad /2$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad /3$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad /4$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2 \quad /5$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{j=1}^{j=n} (2j-1)^3 = n^2(2n^2 - 1) \quad /6$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k.k! = (n+1)! - 1 \quad /7$$

$$\forall n \geq 2 \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad /8$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{1 \times 2 \dots \times n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad /9$$

تمرين 7 :

بين أن :

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3 \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

تمرين 8 :

ليكن x من \mathbb{R} و a و b و c و d من \mathbb{Q} بحيث :

$$ad - bc \neq 0 \quad \text{و} \quad x \notin \mathbb{Q}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q} \quad : \text{بين أن : /3}$$

تمرين 9 :

بين أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

تمرين 10 :

بين أن :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad |a-b| \leq c \quad \text{و} \quad |a+b| \leq c \implies |ab| \leq \frac{c^2}{2}$$

$$|b| < 1 \quad \text{و} \quad |a| < 1 \implies |a+b| < |1+ab| \quad /2$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

تمرين 4 :

لتكن x و y و z أعداد حقيقية .

$$\text{نضع : } a = x + \frac{1}{y} \quad \text{و} \quad b = y + \frac{1}{z} \quad \text{و} \quad c = z + \frac{1}{x}$$

و نفترض أن : x و y و z أعداد موجبة قطعاً و أن $a \geq b \geq c$ بين أن : $a \geq 2$

تمرين 11 :

ليكن n من \mathbb{N} بين أن :

$$(\forall k \geq 1) \quad n^k + k.n^{k-1} \leq (n+1)^k$$

تمرين 5 :

لتكن f دالة معرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} بحيث :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

/1 بين أن $f(0) = 0$ و أن f فردية .