

تمارين درس عموميات حول الدوال

التمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$

- (1) بين أن 3 هي القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند 1 .
(2) بين أن -1 هي القيمة الدنيا المطلقة للدالة f .

التمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- (1) بين أن $-1 < f(x) < 1$ لكل x من \mathbb{R} .
(2) تحقق من أن 1 و -1 ليسا بمطرافي الدالة f . علل جوابك

التمرين رقم 3 :

لتكن f و g حيث : $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ و $g(x) = 2x^2 - 3x - 2$

- (1) قارن الدالتين f و g وأعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .
لاحظ أن : $f(2) = g(2)$

- (2) ادرس تغيرات f و g وحدد مطراف كل منهما .
(3) نعتبر الدالة h المعرفة ب : $h(x) = \sup(f(x), g(x))$

(a) اكتب تعبير ل $h(x)$ بدون استعمال الرمز \sup .

(b) ارسم المنحنيات : C_f و C_g و C_h في نفس المعلم.

التمرين رقم 4 :

لتكن f و g حيث : $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = -x^3$

(1) أنشئ في نفس المعلم المنحنيين C_f و C_g .

- (2) استنتج أن المعادلة $x^3 + \sqrt{1+x} = 0$ تقبل حلا وحيدا
 α بحيث : $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{7}{8}$

(3) حل في المجال $[-1, +\infty[$ المتراجحة $x^3 + \sqrt{1+x} < 0$

(4) حدد ميانيا : f ($[-1, 2]$) و f ($[3, +\infty[$)

التمرين رقم 5 :

(1) بين أن المعادلة $x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا

α بحيث : $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

(2) حدد بدلالة α حلول المتراجحة :

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 < 0$$

التمرين رقم 6 :

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2}$

(1) ادرس تغيرات f على \mathbb{R} .

(2) بين أن : $\frac{1}{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \frac{3}{2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

التمرين رقم 7 :

ليكن $(\Delta) = \{M(x, y) / 0 \leq y \leq 2\sqrt{x} \text{ و } x \geq 0\}$ من المستوى

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} ; x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0$$

بين أن C_f منحني الدالة f يوجد ضمن الحيز (Δ)

التمرين رقم 8 :

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x^2 + 3x + 3}$

(1) بين أن f مكبورة بالعدد 2 ومصغورة بالصفري.

(2) نعتبر الدالتين العدديتين u و v المعرفتين بما يلي :

$$u(x) = x^2 + 3x \text{ و } v(x) = \frac{2x+5}{x+3}$$

(a) ادرس تغيرات الدالتين u و v .

(b) حل في \mathbb{R} المعادلة $u(x) = +3$.

(c) حدد حيز تعريف المركبة $v \circ u$ ثم تحقق أن $f = v \circ u$

(d) استنتج تغيرات الدالة f .

(3) حدد f ($[1, 2]$) واستنتج $\text{Max}(f(x))$ و $\text{Min}(f(x))$ $x \in [1, 2]$

(4) حدد $f^{-1}([0, 1])$

التمرين رقم 9 :

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي :

$$f(x) = \frac{4(x^2+x)-3}{x^2+x} \text{ و } g(x) = \frac{4x-3}{x}$$

(1) بين أن $f = g \circ h$ حيث h دالة حدودية من الدرجة

الثانية يجب تحديدها.

(2) ادرس تغيرات الدالتين g و h ثم استنتج رتبة الدالة

على مجموعة تعريفها.

(3) بين الدالة f مصغورة ب 16 على المجال $]-1, 0[$

ومكبورة ب 4 على $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

(4) هل الدالة f مصغورة على مجموعة تعريفها؟

التمرين رقم 10 :

نعتبر الدالتين f و g حيث :

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ و } g(x) = x^2 - 4x + 5$$

ادرس رتبة الدالة $h = g \circ f$.

التمرين رقم 11 :

ادرس تغيرات الدوال التالية : (1) $f(x) = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x)$

$$g(x) = \frac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} : (3) \quad g(x) = \frac{2\sqrt{x}-2-1}{\sqrt{x}-2+1} : (2)$$

التمرين رقم 11 :

إنطلاقاً من جدول تغيرات f التالي:

x	-4	-2	0	2	3	4
$f(x)$	4	1	3	0	-3	-2

أنشئ جدول تغيرات الدوال التالية:

$$f_3(x) = -\frac{1}{f(x)} \quad f_1(x) = -2f(x) + 3$$

$$f_4(x) = \sqrt{f(x)} \quad f_2(x) = f(1-x)$$

التمرين رقم 12 :

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x + 4\sqrt{x+1} + 2$:
(1) حدد دالتين g و h بحيث يكون لكل x من $[-1, +\infty[$

$$f(x) = goh(x)$$

(2) أنشئ في نفس المعلم المنحنيين: C_f و C_g .

$$(3) \text{ حل ميبانيا المتراجحة: } 1 - 4x^2 + x^4 > \sqrt{1-x^2}$$

(4) أعط جدول تغيرات الدالة f .

التمرين رقم 13 :

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{8-|x|} + \sqrt{|x|}$

(1) حدد D_f و أدرس زوجية f .

$$(2) \text{ بين أن: } \forall x \in [0, 8] \begin{cases} (8-x) \in [0, 8] \\ f(8-x) = f(x) \end{cases}$$

(3) بين أن:

$$(\forall (a, b) \in [0, 4]^2) : a > b \Rightarrow \sqrt{8-b} > \sqrt{8-a} > \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

(4) استنتج أن:

$$(\forall (a, b) \in [0, 4]^2) : a > b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > \frac{1}{\sqrt{8-a} + \sqrt{8-b}}$$

(5) استنتج تغيرات f على المجالين $[0, 4]$ و $[4, 8]$.

(6) أعط جدول تغيرات f على المجال $[-8, 8]$.

(7) حدد $\text{Max}(f(x))$ و $\text{Min}(f(x))$ على D_f .

(8) قارن العددين: $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

التمرين رقم 14 :

لتكن f الدالة المعرفة ب: $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{1-x}\right)$

(1) تحقق أن: $(\forall x \in]0, 1[) : f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x}$

(2) أدرس تغيرات الدالة f كل من المجالين $]\frac{1}{2}, 1[$ و $]0, \frac{1}{2}[$.

(3) ماهي أكبر قيمة يأخذها العدد $A = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right)$

عندما يتغير a و b في IR_+^* بحيث يبقى $a + b = 1$

التمرين رقم 15 :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR^+ بما يلي :

$$f(x) = E(x^2) - 2E(x)$$

(a) بين أن: $(\forall x \in IR^+) : (E(x))^2 \leq E(x^2)$

(b) استنتج أن -1 هي القيمة القصوية المطلقة للدالة f .

(2) اضع $a = n + \frac{1}{2}$ حيث $x \in IN$ أحسب $f(x)$ بدلالة n

(b) استنتج أن f غير مكبورة .

التمرين رقم 16 :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR_+^* بما يلي :

$$f(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$$

(1) بين أن الدالة f محدودة ب 0 و 1 .

(2) بين أن 0 قيمة دنوية مطلقة للدالة f و 1 ليس بالقيمة القصوية المطلقة .

التمرين رقم 17 :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$

(1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f .

(2) حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 1$.

(b) هل الدالة f تطبق تبايني؟

(3) حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = -1$.

(b) هل الدالة f تطبق شمولي؟

(4) بين أن لكل x من IR_+^* . $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

(5) استنتج أن f دالة محدودة على المجال $[1, +\infty[$.

(6) نعتبر المجموعة: $A = \{f(x) / x \in \mathbb{N}^*\}$

بين أن $A \subset [0, 2[$

التمرين رقم 18 :

لتكن f_m الدالة المعرفة ب: $f_m(x) = \frac{m|x|+1}{|x|-m}$ حيث $m \in \mathbb{R}$

(1) هل f_m تطبق من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} ؟

(2) حدد حسب قيم m حيز تعريف الدالة f_m .

(3) نفترض أن $m < 0$ ونعتبر g_m قصور الدالة f_m على IR^+ .

(a) بين أن لكل x من IR^+ : $m < g_m(x) \leq -\frac{1}{m}$

(b) بين أن g_m تطبق تقابلي من IR^+ نحو المجال $\left]m, -\frac{1}{m}\right]$

وحدد تقابله العكسي g_m^{-1} .

(4) نعتبر المجموعة: $A = \{f_{-1}(x) / x \in \mathbb{N}\}$

بين أن $A \subset]-1, 1]$