تمارين درس المنطق

التمرين رقم1 :

1) أكتب كلا من العبارتين التاليتين باستعمال الرموز المنطقية وأذكر إذا كانت صحيحة أم خاطئة.

a) (P_1) " لا يوجد أي عدد جذري حل للمعادلة $x^2-2=0$ "

b) (P_2) "لكل عددين جذريين x و y يوجد عدد جذري z بحيث: $x<z$ أو $y<z$ "

2) أكتب العبارات التالية باستعمال الرموز المنطقية ثم حدد نفي كل واحدة منها:

(P_1) " مربع أي عدد حقيقي هو أكبر من أو يساوي 1- "

(P_2) " للحدودية x^2-2x-3 على الأقل جذر حقيقي "

(P_3) "يوجد عددحقيقي أصغر قطعامن كل الأعداد الحقيقية"

(P_4) " إذا كان عدد حقيقي أصغر من أو يساوي 1- فإن هذا العدد سالب قطعا.

التمرين رقم2 :

أكتب نفي العبارات التالية و أدرس حقيقتها:

$(P_1)\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*: \frac{1}{x}<x$ ، $(P_2)\ \forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{1+x^2}-|x|\ge 0$

$(P_3)\ \forall x\in[1;+\infty[: (x^2\ge1$ و $x^2+2x-3\ge0)$

$(P_4)\ \exists x\in\mathbb{R}^+ / (x^2\le x$ أو $1+\frac{1}{x}<0)$

$(P_5)\ \forall x\in\mathbb{Q}: (x^2\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z})$

$(P_6)(\forall x\in\mathbb{R}).(\exists y\in\mathbb{R}): (x^2+y^2+xy-3=0)$

$(P_7)(\exists n\in\mathbb{N}^*)/(\forall x\in\mathbb{R}): \left(\frac{x^{2n}}{1+x}>1\right)$

$(P_8)(\forall x\in]0,1[): \left(\frac{2x}{x^2(1+x^2)}<1\right)$

التمرين رقم3 :

لتكن P و Q و R ثلاثة عبارات معلومة. بين أن العبارات التالية قوانين منطقية:(بدون إستعمال جداول الحقيقة)

$P\Rightarrow(\overline{P}\Rightarrow Q)$

$(P$ أو $Q) \Leftrightarrow [(P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q]$

$(P\Rightarrow Q)\Rightarrow[(P$ أو $R)\Rightarrow(Q$ أو $R)]$

التمرين رقم4 :

باستعمال الإستدلال الإستنتاجي بين أن:

1) $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}): x+\frac{1}{x}\ge 2$

2) $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2): (|x|<1$ و $|y|<1)\Rightarrow |x+y|<|1+xy|$

3) $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2}).(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{*2})$

$$(ax+by=1)\Rightarrow\left(\frac{1}{x^2+y^2}\le a^2+b^2\right)$$

4) $$(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3):\ \left.\begin{array}{l}|x-y|\le z\\ |x+y|\le z\end{array}\right\}\Rightarrow |xy|\le\frac{z^2}{2}$$

5) $$(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3)\left.\begin{array}{l}|x|<z\\ |y|<z\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\frac{x+y}{2}\right|+\left|\frac{x-y}{2}\right|<\frac{z^2}{2}$$

التمرين رقم5 :

بين أن لكل m و n من $\mathbb{N}$:

($14n+14$ مجموع 3مربعات كاملة) $\Rightarrow$ ($n+1$ مربع كامل)

($n+1$ مجموع 3مربعات كاملة) $\Rightarrow$ ($3n+1$ مربع كامل)

($mn+1$ مربع كامل) $\Rightarrow$ (m و n متتابعين في $\mathbb{N}$)

التمرين رقم6 :

بإستعما ل الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس بين أن :

1) $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2): (x\ne1$ و $y\ne1)\Rightarrow(x+y-xy\ne1)$

2) لكل x و y من $\mathbb{R}$:

$$(x\ne y \text{ و } xy\ne1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1}\ne\frac{y}{y^2+y+1}$$

3) $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3): (x+y>2z) \Rightarrow (x>z$ أو $y>z)$

التمرين رقم7 :

بإستعما ل الإستدلال بالتكافؤات المتتالية بين أن :

1) $$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2): \left.\begin{array}{l}-1<x<+1\\ -1<y<+1\end{array}\right\}\Leftrightarrow|x+y|<|1+xy|$$

2) $$(\forall(x,y,a,b)\in\mathbb{R}^4_{*+})\left[x<y\Leftrightarrow\frac{x}{y}<\frac{ax+by}{bx+ay}<\frac{y}{x}\right]$$

3) لكل x و y من $\mathbb{R}^+$:

$$y<x\Leftrightarrow\sqrt{1+x}-\sqrt{x}<\sqrt{1+y}-\sqrt{y}$$

4) لكل x و y من $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=1\Leftrightarrow x+y=0$$

5) لكل θ من $\mathbb{R}$:

$$(\cos^3\theta+\sin^3\theta=1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(\sin\theta=0 \text{ و } \cos\theta=1)\\ \text{أو}\\ \sin\theta=1 \text{ و } \cos\theta=0\end{array}\right.$$

التمرين رقم8 :

1) بين أن $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \ a+b\sqrt{2}=0\Leftrightarrow(a=0$ و $b=0)$

2) حل في $(\mathbb{Q}^*)^2$ المعادلة : $x^2-2y^2=0$

3) نفترض أن $(a;b)\neq(0;0)$ بين أنه: $\exists(x;y)\in\mathbb{Q}^2 / (a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1$

التمرين رقم9 :

باستعمال الإستدلال بفصل الحالات :

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$ و $\frac{n^2+1}{3}\notin\mathbb{N}$

2)بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}$. النظمة التالية: $\begin{cases} y^3+y^2=2 \\ x^2+xy+y^2=x \end{cases}$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}^2$

3) حل في $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-3}=4$ و $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$

4) حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} |x+y|-2|x-y+1|=-6 \\ x-2y=6 \end{cases}$

التمرين رقم10 :

باستعمال الإستدلال بالخلف:

1) بين أن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ و إستنتج أن $\sqrt{3}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

2) ليكن x و y من $\mathbb{Q}^+$ بحيث $\sqrt{x}\notin\mathbb{Q}$

بين أن: $\sqrt{x}+\sqrt{y}\notin\mathbb{Q}$

3) ليكن $a\in\mathbb{R}^+$ بحيث $[(\forall\varepsilon>0): a<\varepsilon]$: بين أن $a=0$

4)بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : \sqrt{\frac{n}{n+2}}\notin\mathbb{Q}$

5) ليكن n و p من IN^* بحيث $p>1$.

بين أنه إذا كان p يقسم n فإن p لايقسم $n+1$

التمرين رقم11 :

باستعمال الإستدلال بالترجع:

1) بين أن $q\neq1$; $(\forall n\in IN^*)1+q+q^2+\dots\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2)بين $(\forall n\in IN^*)1+2^3+3^3+\dots\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3)بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: n^3-n يقبل القسمة على 3 .

4) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7 .

5)بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $3^{2n}+2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11

6)بين أن $(\forall n\in IN)\ (1+q)^n\geq1+nq$ حيث $q>0$

7) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^* : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$

8) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}: \quad 7^n>5^n+6^n$

9) بين أن: $(\forall n\in IN^*) \quad : \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1)$

10) بين أن:

$$(\forall n\in IN^*) : \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

11) بين أن:

$$(\forall n\in IN^*) : 1+2^3+3^3+\dots\dots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

12) بين أن : $(\forall n\in IN^*) : \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

13) بين أن لكل n من N^*:

$$1-2^2+3^2-\dots\dots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}(1+2\cdots+n)$$

14)بين أن: $(\forall n\geq2): \quad 1\times2\times3\times\dots\times n\leq(\frac{n+1}{2})^n$

15)بين أن: $(\forall n\in IN^*) : \frac{1}{1\times2\times3\times\dots\times n}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

التمرين رقم12 :

1)بين أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists(p_n;q_n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}) : \begin{cases} (2+\sqrt{3})^n=p_n+\sqrt{3}.q_n \\ p_n^2-1=3q_n^2 \end{cases}$$

2) بين أن :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x+y\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=y=0$$

3) إستنتج أن الزوج (p_n,q_n) وحيد.

4) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}) : 2p_n-1\leq\left(2+\sqrt{3}\right)^n<2p_n$

5) إستنتج أن الجزء الصحيح $E(p_n+q_n\sqrt{3})$ عددفردي

التمرين رقم13 :

ليكن a حلا للمعادلة $x+\frac{1}{x}=3$ مع $a>1$.

نضع : $u_n=a^n+\frac{1}{a^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right) : u_{n+1}=u_1u_n-u_{n-1}$

2) إستنتج أن $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{N}$

التمرين رقم14 :

1) بين أنه

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)\left(\exists(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}\right) / n=2^q(2p+1)$$

2) بين أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right) : 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}\notin\mathbb{N}$

التمرين رقم15 :

لتكن a و b و c أعداد صحيحة نسبية :

بين أنه إذا كانت الأعداد a و c و $f(1)$ فردية فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Q}$.